Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Maria Ester Malheiro Barbosa de Lemos

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino em Organização e Tratamento de Dados (2º e 3º Ciclos)

Digital Resources for Junior High School Students in Statistics

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Maria Ester Malheiro Barbosa de Lemos

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino em Organização e Tratamento de Dados (2º e 3º Ciclos)

Digital Resources for Junior High School Students in Statistics

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Andreia Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e do Doutor Pedro Cruz, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president	Prof. Doutor Pedro Filipe Pessoa Macedo Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	Profª. Doutora Irene Vitória Ribeiro de Brito Professora Auxiliar da Universidade do Minho
	Prof. Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Dedicatória

Aos meus Pais,

Joaquim e Fátima,

Todo o amor incondicional e dedicação que sempre me deram e continuam a dar na construção do meu SER.

agradecimentos / acknowledgements

A realização de uma dissertação de mestrado pressupõe que a mesma seja desenvolvida de forma individual. No entanto é necessário um conjunto de contributos de natureza diversa para se poder concluir com sucesso este trabalho.
Sem dúvida que uma dissertação é um polinómio de ajudas e apoios, pessoais, familiares e profissionais.
Tudo teve início numa ligação trigonométrica, que funcionou de forma plena, pelo que é inteiramente merecido que comece, desde já, a agradecer, aos "outros" dois lados do triângulo, nomeadamente à Prof. Doutora Andreia Hall e ao Prof. Doutor Pedro Cruz, meus orientadores, que desde o início do trabalho mostraram competência científica, disponibilidade, acompanhamento e generosidade para dar apoio e partilharem conhecimento, assim como pelas críticas, correções e sugestões relevantes feitas durante a orientação.
Não posso deixar de agradecer, também, à minha colega de luta, Filomena Figueiredo, pela relação biunívoca criada em prol de um objetivo comum e pela partilha e apoio que me foi dando ao longo de todo o trabalho, bem como pelas proveitosas conversas e conselhos transmitidos nas viagens de ida e volta a Aveiro, na escola, em casa, aos fins de semana, ao telefone, sempre que foi necessário. Muito obrigado por tudo, Filomena.
Para que esta equação se tornasse possível foram necessárias, também, muitas operações de foro pessoal e familiar, onde todos os elementos foram determinantes para se conseguir ultrapassar muitas vezes os limites que a vida familiar exige. Neste particular não posso deixar de agradecer a toda a minha família que, desde sempre, me apoiou e manifestou disponibilidade para colmatar as minhas ausências, mormente os meus sogros, os meus irmãos e cunhados.
Mas o meu agradecimento integral não podia deixar de ir para o meu marido e filhos. Ao meu marido agradeço o estímulo e a inspiração que sempre me deu para que realizasse esta dissertação, bem como a ajuda no meu crescimento científico e pessoal, pelas inúmeras trocas de impressões, comentários ao trabalho e pelo pleno apoio familiar, compreensão e paciência que revelou ao longo deste tempo todo.
Aos meus filhos agradeço toda a compreensão e ternura sempre manifestadas, apesar da falta de atenção e algumas ausências, pela excitação e orgulho com que sempre reagem aos sucessos da mãe. Tenho a esperança matemática que o entusiasmo, seriedade e empenho que dedico ao trabalho lhes possa servir de estímulo para fazerem sempre "mais e melhor", na sua vida pessoal e de estudantes.
Para TODOS o meu sincero,

OBRIGADO

“Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós."

— Antoine de Saint-Exupéry

Palavras Chave

Ensino/aprendizagem, organização e tratamento de dados, recursos digitais, SIACUA, MEGUA, SageMath, escolha múltipla

Resumo

O presente estudo tem por base um enquadramento teórico no âmbito do ensino-aprendizagem, em particular, no ensino dos conteúdos lecionados de Organização e Tratamento de Dados, no 2º e 3º ciclos do Ensino Básico, aferindo as conexões existentes ao nível da conceção de recursos educativos digitais e a sua utilização em contexto educativo. Assim, pretende-se analisar a contribuição das tecnologias como suporte à dinamização de processos de aprendizagem inovadores e autónomos para os alunos, bem como evidenciar as vantagens e dificuldades sentidas pelos professores aquando da elaboração e implementação de estratégias pedagógicas associadas à utilização de plataformas *online* especificamente concebidas para apoiar este tipo de processo. Este estudo disponibiliza, também, um constructo efetivo de recursos digitais, com exercícios parametrizados de escolha múltipla, elaborados no âmbito do *software* MEGUA, com recurso à utilização da plataforma *Sage Mathematics*. Pretende-se, desta forma, contribuir para a existência de um quadro de recursos, que podem ser desenvolvidos em sistemas de ensino à distância, como é o caso do SIACUA, plataforma aberta, que permite o acesso livre *online* a diversos exercícios de escolha múltipla, incluindo propostas de resolução dos mesmos. Os resultados obtidos com o desenvolvimento de recursos digitais específicos para determinadas matérias curriculares contribuem para a diversificação das estratégicas pedagógicas adotadas pelos professores, no sentido de melhorar o processo ensino - aprendizagem e suscitando um maior interesse dos alunos pelos temas em estudo.

Keywords

Teaching / learning, data analysis statistics, digital resources, SIACUA, MEGUA, SageMath, multiple choice

Abstract

This study is based on a theoretical framework in teaching and learning, particularly in the contents of Data Analysis Statistics, a subject taught at the second and third cycles (equivalent to junior high school, key stages 2 and 3, grades 5 to 9), assessing the level of the existing connections in the design of digital educational resources and their use in an educational context. Thus, the objective is to analyse the contribution of technology to the implementation of innovative and autonomous learning processes for students, as well as highlight the advantages and difficulties experienced by teachers in the design and employment of pedagogical strategies associated to the use of online platforms specifically designed to support this kind of process. It also aims to provide an effective construct of digital resources with multiple choice parameterized exercises, prepared under the MEGUA software, with the use of Sage Mathematics platform. Therefore, this study intends to contribute to a resources structure that can be developed in distance learning systems, such as the SIACUA, an open platform that allows free online access to various multiple choice exercises including proposals for solving them. The results obtained with the development of digital resources specific to certain curricular subjects contribute to the diversification of pedagogical strategies adopted by teachers to improve the teaching - learning process and increase the student interest in the study subjects.

Acrónimos e abreviaturas

b-learning - Blended Learning

HTML - Hyper Text Markup Language;

ID - Nome do utilizador;

INE - Instituto Nacional de Estatística;

ME - Ministério da Educação;

MEC - Ministério da Educação e Ciência;

MEGUA - Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro;

MSC - Mathematical Subject Classification;

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics;

OTD - Organização e Tratamento de Dados;

SAGE - Sytem for Algebra and Geometry Experimentation;

SIACUA - Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro;

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação foi elaborada com o propósito de provocar uma reflexão acerca da importância em torno das novas tecnologias multimédia nos contextos educativos, aferindo a pertinência do ensino à distância em conteúdos da matemática no âmbito do 2º e 3º ciclo de escolaridade.

Pretende-se, ainda, recorrer à inovação associada a lógicas educativas e formativas em prol de um desenvolvimento de recursos educativos que permitam aos alunos experienciar novas metodologias de aprendizagem mais dinâmicas, mais diversificadas e atuais, recorrendo a tecnologias de uso quotidiano pelos mesmos.

Neste contexto, e segundo Lévy (1999) e Prensky (2001), as Tecnologias da Informação e Comunicação na educação podem ser pensadas como recursos que potencializam as dimensões do processo de ensino aprendizagem, tendo em vista que estamos inseridos no contexto da cibercultura e que os nossos alunos do século XXI, nasceram no meio desta avalanche de tecnologias.

Sem dúvida que a sociedade contemporânea está inundada de tecnologia e que obviamente a mesma tem repercussões diretas e indiretas na educação e nas metodologias de aprendizagem a serem utilizadas. Neste âmbito, sublinhe-se a possibilidade de se recorrer a múltiplas alternativas tecnológicas, que facilitam e motivam para a aprendizagem, permitindo a realização de um estudo autónomo, o qual pode ser ajustado de acordo com as diferentes necessidades de quem aprende.

O presente trabalho parte do pressuposto que as novas tecnologias deverão estar presentes no desenvolvimento de processos formativos e pedagógicos, criando recursos educativos inovadores e criativos como instrumentos de trabalho na prática educativa.

Neste sentido as estratégias de investigação delineadas para desenvolver esta dissertação processam-se em duas fases principais: a fundamentação teórica e o desenvolvimento de aplicações empíricas para uma aplicação real em contexto educativo e formativo.

A primeira etapa da pesquisa consistiu na construção do quadro teórico sobre tecnologias de informação e comunicação, o ensino à distância bem como sobre recursos digitais. Para tal, procedeu-se a uma revisão bibliográfica que permitiu obter conhecimentos fundamentais no âmbito destes tópicos, e que validam a metodologia utilizada e o estudo empírico proposto.

Assim e considerando que o presente estudo defende uma maior intervenção das tecnologias no ensino, e em particular, na matemática, desenvolveu-se uma aplicação empírica, tendo por base a conceção de recursos digitais aplicados ao domínio de Organização e Tratamento de Dados (OTD) para os 5º e 6º anos do 2º ciclo e 7º e 8º anos do 3º ciclo do Ensino Básico.

Para este efeito irá utilizar-se a plataforma SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador, Universidade de Aveiro), um sistema de aprendizagem aberto que funciona como ferramenta de estudo autónomo e que permite uma utilização à distância. Neste sistema desenvolver-se-á um conjunto de exercícios parametrizados, com questões de escolha múltipla, do Projeto MEGUA (Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro), capazes de fomentarem o conhecimento e capacidades dos alunos, não só no tempo em que se encontram presencialmente na escola, como também, noutros períodos e noutros locais onde pretendam exercitar e possam verificar a resolução adequada para cada exercício.

Este estudo não pretende ser um fim de si mesmo, mas mais um ponto para a reflexão, troca de ideias, bem como um contributo para o desenvolvimento do tema. Não possui um carácter conclusivo, mas sim construtivo e de continuidade, num contexto social e tecnológico de grande imprevisibilidade e variabilidade que exige de todos (professores, pais, alunos e comunidade educativa) uma permanente atenção e conhecimento sobre as mudanças constantes e complexas que ocorrem no ensino, nas novas tecnologias de comunicação e informação, assim como na sociedade em geral ao nível dos diversos contextos económicos e culturais nos quais se desenvolvem os processos educativo e formativo.

1.1 Estrutura da dissertação

Na estrutura desta dissertação considera-se o capítulo 1 como uma introdução onde se contempla as temáticas que irão ser abordadas e analisadas ao longo deste trabalho, bem como uma referência à estrutura da dissertação.

Neste capítulo delineia-se, também, uma abordagem às novas tecnologias de informação e comunicação, as diversas aplicações existentes, destacando a profusão de recursos e ferramentas tecnológicas disponíveis para os professores, que envolvem um estímulo e oportunidade para um desenvolvimento pessoal e profissional dos mesmos; enquadra-se o ensino à distância como metodologia educativa e curricular emergente nos últimos anos nas práticas pedagógicas, tendo-se vindo a verificar um crescente interesse quer por parte dos professores, quer de alunos na sua utilização. A aplicação de estratégias associadas ao ensino à distância permite um desenvolvimento integrado e uma melhor planificação, execução e controlo na realização de determinadas tarefas e atividades, mormente no relacionamento que estas abordagens têm na problematização da conceção de recursos digitais como um contributo para o desenvolvimento pedagógico, dado que os mesmos possibilitam novas dimensões na forma de educar e ensinar, bem como no método de ensino aprendizagem a ser adotado.

Em seguida, no capítulo 2 começa-se por fazer referência à importância do ensino da Estatística. Consecutivamente, mencionam-se os subdomínios abordados no domínio OTD, do Programa de Matemática homologado pelo Despacho nº 9888-A/2013 do Ministério da Educação e Ciência, referentes aos 2º e 3º ciclos. Posteriormente, faz-se uma abordagem aos conceitos teóricos de suporte à organização e tratamento de dados, de acordo com o definido neste Programa e nas Metas Curriculares. Por último alude-se à importância da utilização das TIC neste domínio.

No capítulo 3 faz-se um enquadramento dos pré requisitos necessários à criação de exercícios parametrizados em LaTeX com base na biblioteca Megua para o sistema de computação algébrica *Sage Mathematics*, apresentando-se, também, uma concretização para cada exercício concebido. Por fim, faz-se referência à plataforma SIACUA onde os exercícios serão alojados e disponibilizados ao acesso público através de ID próprio do utilizador.

No último capítulo tecem-se algumas considerações sobre os temas abordados nesta dissertação, bem como as limitações que se foram sucedendo na concretização de algumas tarefas preconizadas nos objetivos pretendidos no âmbito deste estudo. Para terminar apontam-se algumas sugestões para a elaboração de trabalhos futuros nestas temáticas.

Adicionalmente, incluiu-se em apêndice os códigos fonte que serviram de base para a conceção dos exercícios desenvolvidos no âmbito desta dissertação.

1.2 O contributo das TIC para o sucesso nas aprendizagens

As circunstâncias em que as novas tecnologias de informação e comunicação se inserem no sistema formativo e educativo é, hoje em dia, uma questão inabalável, verificando-se a sua integração em diferentes domínios, caminhando as mesmas lado a lado com as abordagens curriculares e as estratégias de ensino mais recentes. Este desígnio já vem sendo analisado em diversas reflexões feitas por diversos autores ao longo dos anos, atente-se mormente a Ponte (2003) que constatou que "... as tecnologias têm hoje um papel fundamental na sociedade e a tarefa dos educadores é tirar delas o melhor partido, conservando, como em relação a tudo, o sentido crítico".

Nos últimos anos tem-se assistido à reestruturação da economia global fruto de uma rápida mudança tecnológica e de um novo paradigma técnico-económico, que impõem uma competitividade mais exacerbada, quer a nível empresarial, quer individual, no que respeita ao conjunto de saberes e competências profissionais das pessoas. Esta exigência leva a que ocorram consequências importantes nas lógicas comportamentais, de desenvolvimento pessoal e profissional, bem como nas competências e aprendizagens a serem feitas pelos alunos.

Contudo, tanto no campo da educação como no âmbito curricular tem existido muita dificuldade em circunscrever, com algum rigor, a amplitude da intervenção das novas tecnologias. Apesar das dificuldades inerentes à ambiguidade e complexidade da ligação entre as mesmas, pretende-se explicar as relações que vão sendo estabelecidas entre ambas, bem como o respetivo enquadramento no sistema educativo das várias ferramentas/instrumentos tecnológicos existentes para a prossecução de uma dinâmica mais ativa de informação e comunicação no ensino das diferentes aprendizagens.

A este respeito Miranda (2007) argumenta que "com as inúmeras e diversas possibilidades propiciadas pelas novas tecnologias e a sua capacidade de penetração, ampliação e disseminação da informação e do conhecimento desenha-se um novo mundo, (...) a interação e o conhecimento adquirem novos significados e novas aplicações, um mundo onde aprender e ensinar se traduzem e associam em novos processos, ...".

No entanto, as mudanças tecnológicas nem sempre são fáceis de provocar efeito e de se implementarem, especialmente no meio escolar. As orientações pedagógicas podem direcionar a utilização das tecnologias no currículo, mas se a escola, os professores, os funcionários, os alunos não participarem ativamente ou, se participam, fazem-no em pequeno número, não proporcionam o impacte desejado e possível de atingir.

O que parece ser especialmente importante é a experiência da utilização das novas tecnologias, mais do que a ferramenta tecnológica usada é o que o programa pode fazer pelo aluno, o que ele pode aprender por si próprio com o encorajamento e motivação necessária para desencadear processos de aprendizagem criativos e, fundamentalmente, autónomos. A este respeito Zuin (2010) alude que "a tecnologia ocupa cada vez mais posição-chave na sociedade atual (...) como um processo social que determina as configurações identitárias dos indivíduos e as do processo educacional/formativo."

Constata-se que a tecnologia pode constituir uma prioridade na construção do saber e do conhecimento dos alunos, no sentido de melhorar os índices escolares dos mesmos e torná-los mais aptos nos vários domínios em que irão ter de intervir na sociedade atual. A interpretação da aplicação das diferentes ferramentas e a análise das práticas das instituições escolares constituem instrumentos necessários ao professor, para melhor compreender o desenvolvimento educativo do aluno e fomentar no mesmo um espírito crítico, autónomo e disponibilidade para a autoformação.

A este respeito Vieira e Moreira (2011) defendem que os alunos devem ter "competências para se desenvolverem como participantes autodeterminados, socialmente responsáveis e criticamente conscientes em (e para além de) ambientes educativos, por referência a uma visão da educação como espaço de emancipação (inter) pessoal e transformação social."

Concomitantemente assiste-se atualmente a uma filosofia educativa em que as estratégias pedagógicas se inserem num contexto sócio - económico de tendência globalizante, onde as dinâmicas sociais enfatizam preocupações cada vez mais informativas e comunicacionais alicerçadas em tecnologia, programas e aplicações, que estão sempre disponíveis para serem utilizados em qualquer lugar e em qualquer momento. A conjuntura educativa atual necessita de metodologias pedagógicas abertas, dinâmicas e flexíveis para ajustar eficazmente a teoria e a prática escolares e, assim, poder reforçar a sua correlação nas aprendizagens a serem feitas pelos alunos.

Neste contexto têm surgido novas realidades educativas que, segundo Gago et al (1994), não é apenas um modelo do conceito de educação permanente ligado ao mundo do trabalho, "cuja importância e prioridade lhe advém das necessidades de modernização dos processos produtivos, em virtude da introdução das novas tecnologias, da reorganização das empresas ou das exigências competitivas dos mercados", é sim uma nova atitude que os jovens devem ter perante os desafios que os esperam no futuro, e que eles têm que se ir preparando em contexto escolar de forma a estarem mais adaptados às realidades desta sociedade.

Reconhece-se a existência de um certo paralelismo entre a evolução das novas tecnologias de informação e comunicação e as mudanças ocorridas no campo educativo, em especial as registadas nas plataformas de *e-learning* e no desenvolvimento de recursos digitais. A compreensão do desenvolvimento desse tipo de ligação alargada (em rede) é um objetivo que preside à realização deste estudo.

Neste âmbito, o desenvolvimento de múltipla informação e fontes de visionamento que as novas tecnologias permitem recorrer, tornam-se uma oportunidade única para fazer transformações profundas ao nível da conceção de recursos educativos e da forma como disponibilizamos esses mesmos recursos aos alunos, quer seja por via presencial, quer seja via sistemas de utilização flexível e autónomos, como sejam o caso das plataformas de *e/b-learning*.

1.3 Plataformas tecnológicas: um elemento diferenciador no processo ensino/aprendizagem

As sociedades modernas e a educação articulam-se, cada vez mais, com a emergente sociedade da informação e comunicação, na qual interagem diversos atores, onde se destaca a intervenção do professor como um ator fundamental na intermediação que desenvolve entre todos os intervenientes e que tem uma capacidade e um papel preponderante na tomada de decisões para decidir de forma adequada, no espectro das várias opções pedagógicas que lhe são disponibilizadas para efeito da prática educativa.

Atualmente existem diversas alternativas que possibilitam suscitar a auto-aprendizagem, desenvolver novas competências, fomentar novas formas de comunicação mais abertas e flexíveis, combinando uma maior integração dos saberes e promovendo uma interdisciplinariedade entre vários domínios curriculares e formativos.

A este respeito Dias (2013) argumenta que "a mudança na conceção das experiências de educação e aprendizagem emerge da natureza de organização em rede na sociedade digital, modelo de organização este que contribui de forma decisiva para a diluição das barreiras de natureza geográfica e sociais, e promove, deste modo, o desenvolvimento das novas práticas de interação entre os indivíduos, e entre estes e os contextos de aprendizagem e conhecimento."

Neste contexto têm emergido diversas formas de índole tecnológica como suporte na gestão do processo curricular possibilitando ao aluno que o acesso ao conhecimento esteja disponível a qualquer hora, a partir de qualquer lugar. A lógica tem passado pelo recurso a modelos de ensino não presencial, podendo o aluno compensar a falta de presença física com recurso às novas tecnologias de forma a aceder a conteúdos disponibilizados *online* nas plataformas utilizadas pelos professores para esse efeito. Existem vários exemplos com este propósito como sejam o caso do *Moodle*, *Blackboard*, *TelEduc*, *Formedia*, *Sigarra*, entre outros. Saliente-se, que para além, destas plataformas de carácter mais transversal existem outras com âmbitos mais especializados como por exemplo, "CensusAtSchool" (http://www.censusatschool.org.uk/) - projeto criado pela Royal Statistical Society Centre for Statistical Education (RSSCSE), a qual disponibiliza ferramentas de apoio ao planeamento estatístico, questionários pré-elaborados, entre outros; ALEA - Ação Local Estatística Aplicada (http://www.alea.pt/); Estatística Interativa da Universidade de Lisboa (http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm24/estint.htm); bem como a Escola Virtual e SIACUA, entre muitos outros.

Na opinião de Dias (2013) "o modelo orientador da conceção dos ambientes virtuais e das plataformas de aprendizagem segue, de um modo geral, o princípio da replicação do que é amplamente conhecido, o espaço e organização da sala de aula, por outras palavras, o território da educação formal." Atente-se, também, que os alunos têm um importante papel, enquanto destinatários do processo educativo. Para Nadal (1998) "o aluno está à descoberta de si mesmo e da sua expressão individual." A missão singular da escola é "levar os alunos a aprender a pensar (...) aberta e criticamente sobre si próprios, a pensar sobre os outros, a pensar sobre o mundo, sobre o conhecimento disponível" (Valente, 1998). Neste âmbito a utilização das plataformas de ensino à distância podem funcionar como um constructo dinâmico e flexível no aumento do conhecimento de forma autónoma e individual pelo aluno, permitindo aos mesmos a otimização dos tempos de estudo e a forma como o querem fazer.

As plataformas deverão funcionar como um veículo que proporcione uma abordagem às atitudes, às aptidões e aos conhecimentos dos alunos de forma diferenciada da tradicional, no sentido do desenvolvimento do saber humano, tendo por objetivo as exigências funcionais ao nível da vida pessoal e profissional e que corresponda a necessidades e interesses pessoais dos alunos.

Desta forma pretende-se estimular o raciocínio científico, aumentar os conhecimentos e o espírito crítico e de autonomia dos mais jovens, com base na construção e disponibilização de inúmeros recursos educativos (em formato digital) acessíveis em múltiplas plataformas *online*, as quais permitem, também, rentabilizar uma panóplia de ferramentas de exploração em contexto educativo demonstrando um potencial didático acrescido para efetuar, paralelamente, abordagens interdisciplinares.

Assim, atualmente, as plataformas de aprendizagem na internet podem não funcionar apenas como repositórios de ficheiros e de documentos de orientação às aprendizagens dos alunos; mas sim, como uma ferramenta de aprendizagem autónoma que permite a esses alunos desenvolverem percursos de aprendizagem interativos sobre uma determinada área.

Silva (2013) defende que "a evolução dos meios e dos objetos de aprendizagem podem permitir potenciar a mobilização e a integração articulada de conhecimento segundo as necessidades individualizadas do discente, enquanto metodologias enquadradas no processo de ensino-aprendizagem a gerir pelo docente. É importante que em igual medida seja disponibilizada formação aos docentes seja sobre a componente pedagógica, seja sobre a componente técnica na produção/utilização de objetos digitais de aprendizagem. A informação e formação dos promotores privilegiados deste acontecimento social - os docentes - é imprescindível na medida em que são estes que vão permitir o melhor uso do conhecimento e simultaneamente são os seus primeiros consumidores."

1.4 Recursos digitais uma ferramenta no contexto educativo

A função de professor tem vindo a ser exercida com o auxílio a novas metodologias e planos de aprendizagem cada vez mais inovadores, promovendo, desta forma, aprendizagens como fatores de desenvolvimento intelectual, processos e limites de discência de acordo com o âmbito escolar nos quais desenvolvem a sua atividade.

Neste contexto os recursos digitais assumem um enfoque crescente na prática pedagógica diária do professor no contexto escolar. Nesta perspetiva, trata-se de um processo de transmissão que requer o confronto do aluno com algumas situações que possam suscitar a sua atividade intelectual e, assim, desencadear estratégias cognitivas de autodescoberta de soluções, que sejam aplicáveis a novas conjunções e a situações diversas.

A organização dos conteúdos versus recursos digitais a serem utilizados está associada às disciplinas e à sua estruturação, devendo o professor elaborar um sistema conexo e ordenado dos conhecimentos a ensinar ou difundir, segundo uma ordem lógica, tornando o processo de aprendizagem mais eficaz.

Segundo Ramos et al (2011) "na prática, todos somos (ou poderemos ser, com alguma facilidade) produtores de informação, de conteúdos e de recursos digitais, naturalmente, uns mais educativos do que outros", no entanto, o fundamental é a abordagem ao processo que constitui uma outra estratégia de ensino e de organização do saber, que valoriza a aprendizagem do educando de forma autónoma e independente. Por outro lado, a estratégia adotada na conceção e implementação de recursos digitais constitui uma forma eficiente de atender a prioridades sociais, de fomentar conhecimentos e aptidões tecnológicas relevantes, promovendo um aproximar dos programas escolares à vida diária dos alunos.

A introdução dos recursos digitais nos processos de aprendizagem cria mais oportunidades para produzir e publicar conhecimento, permitindo, a um número maior de alunos, o acesso a modos mais complexos de raciocínio e de pensamento. A disponibilidade que é suscitada pelo uso de instrumentos partilhados, o estímulo a formas diversas de troca e cooperação, bem como meios de ensino menos dispendiosos são algumas das virtudes associadas à produção de recursos digitais a serem utilizados em plataformas para fins educativos.

Contudo torna-se premente a formação dos professores nas novas tecnologias, que inclua uma formação combinada com a vertente pedagógica. Segundo Recker et al (2005) "é necessário continuar a desenvolver ferramentas e ações de formação para os professores, de modo a ajudá-los a utilizar os recursos das bibliotecas digitais. Segundo estes autores um dos objetivos é apoiar os professores a criar atividades com significado para os alunos e desenvolver as suas habilidades como criadores de recursos digitais".

As escolas atualmente funcionam numa aceção de sistemas de ensino massificados, pelo que urge encontrar estratégias educativas que vão ao encontro da personalização dos indivíduos, no sentido da construção de identidades e da aquisição de saberes e competências que permitam ao jovem o desenvolvimento de capacidades de aprendizagem autónomas e de auto-responsabilização nas aprendizagens a serem efetuadas.

Ramos et al (2011) argumentam que "um recurso digital cujos elementos permitam a modelação, a simulação, a animação, a combinação multimédia, a interatividade (que pode assumir formas diferentes), induz certamente estratégias de ensino e modos de aprendizagem diversificadas e que podem ser orientadas para a manipulação dos objetos, para a interação com os elementos do recurso, para a observação ou representação dos fenómenos, ou ainda para a aprendizagem de conceitos e teorias através da combinação de imagens, palavras e sons, etc."

A transição de um modelo mais clássico para outro modelo requer, para além da já mencionada formação dos professores, estratégias intermédias e a existência de meios de operacionalidade de foro logístico e pedagógico. Os professores ao desenvolverem um trabalho educativo diferente com a utilização de recursos digitais criam instrumentos que permitem fomentar um trabalho que contemple a vertente operativa e cognitiva.

Contudo e segundo Harley et al (2006) "a existência de recursos, só por si, não implica o seu uso na prática letiva dos professores. Existem fatores que funcionam como barreiras para a sua não utilização, que existem, de acordo com a opinião dos professores, razões para a não utilização, tal como o tempo insuficiente, os recursos existentes na sala de aula e a não preferência pedagógica na sua utilização."

Concomitantemente Ramos et al (2011) aludem "que é necessário e desejável dispor de conceitos e instrumentos que permitam distinguir, num universo de grande diversidade de recursos digitais, aqueles recursos que, através de um conjunto de características específicas podem contribuir de forma mais efetiva para a inovação educativa, disponibilizando funções e funcionalidades que os professores podem utilizar para melhorar o ensino e a aprendizagem pelos alunos."

De facto nem tudo serão vantagens e facilidades ao nível da conceção e utilização de recursos digitais em contextos educativos. Neste sentido Figueiredo (2001) refere que "de igual modo, e pela complexidade dos ambientes computacionais desenvolvidos, no plano da utilização do *software* produzido sob esta perspetiva e da sua exploração em sala de aula, foram notórias as dificuldades sentidas por muitos professores no domínio destes programas e ambientes digitais bem como na difícil transposição didática para o contexto educativo específico, onde, para além das dificuldades de domínio razoável dos programas, se juntou a dificuldade de criar novos modelos de aprendizagem, que alguns destes programas mais avançados sugeriam. Ou seja, novos recursos exigiriam novas estratégias pedagógicas. E essa situação foi muito rara. Os media são inquestionavelmente novos, mas as aprendizagens são velhas e ultrapassadas".

Existem, ainda, outras dimensões a considerar e que dizem respeito ao acesso às bibliotecas de recursos, que segundo Campos (2012) "a existência desta panóplia tão alargada de recursos, ao contrário do que poderia parecer à primeira vista, influencia negativamente as necessidades sentidas nas escolas no que se refere à utilização de recursos digitais. As atuais bibliotecas de recursos com recursos digitais não apresentam uma estrutura que seja coerente com as necessidades dos professores e a ausência de motores de pesquisa adaptados aos professores dos ensinos básico e secundário é também referido como um entrave à utilização dos mesmos".

Daqui depreende-se que os novos saberes, tecnologias e recursos digitais utilizados promovem novos modos de pensar, novas metodologias, aplicando diferentes sistemas de aprendizagem, que deverão suscitar o prazer da busca de novas informações e de vencer desafios face à tecnologia, quer por parte dos professores, quer por parte dos alunos.

Capítulo 2

Organização e Tratamento de Dados

Neste capítulo faz-se referência à importância da estatística no currículo escolar e na sociedade, assim como se apresentam os tópicos abordados no tema OTD em relação ao 2º e 3º ciclos (7º e 8º ano) referentes ao Programa de Matemática de 2013 e Metas Curriculares. Posteriormente abordam-se os conceitos relacionados com o tema OTD referenciados no Programa de Matemática para os ciclos e anos supramencionados. Por último menciona-se a importância das TIC no ensino de OTD.

2.1 A importância da estatística nos novos contextos educativos e da sociedade

O modelo orientado para o ensino e a aprendizagem da Estatística está intrinsecamente ligado com o progresso científico e as constantes mudanças tecnológicas e sociais nas últimas décadas, o que tem vindo a explicar, em muitos aspetos, a evolução e os métodos pedagógicos utilizados nas disciplinas.

Torna-se evidente que nas sociedades atuais estamos inundados em dados, números, tudo parece ser capaz de se constituir como uma quantia, o que leva a que ter conhecimentos de Estatística se torne fundamental para se poder ter capacidade de analisar, compreender e interpretar toda essa amálgama de informação que prolifera na nossa sociedade. Carvalho (2006) e Shaughnessy (2007) advogam que de facto, numa sociedade onde muitos dos acontecimentos se medem ou até mesmo são resumidos por um ou mais números é importante a sua interpretação adequada.

A atenção centrada no estudo da estatística, da análise dos resultados existentes, precede quase sempre a ação de uma interpretação do cidadão da realidade que o rodeia e afeta as suas tomadas de decisão no dia-a-dia. A este respeito Palhares (2004) alude à "necessidade de formar cidadãos estatisticamente entendidos, justifica-se enquanto meio facilitador de uma participação cívica esclarecida e crítica, proporcionando contributos em todas as áreas do saber."

Esta ideia é corroborada também por Lopes (2008) que afirma "que a sociedade contemporânea requer do cidadão habilidades que lhes permita uma leitura ampla da realidade que vive e capacidade de intervenção nas ações sociais".

Sem dúvida que existe uma opinião generalizada da importância e da necessidade do conhecimento em Estatística para se poder ser um cidadão de pleno conhecimento sobre os factos e aspetos que norteiam a sociedade hoje em dia, pelo que não é despiciendo que a educação estatística tenha começado a fazer parte das orientações curriculares em Matemática, que segundo Gal (2002) "tem em vista desenvolver a literacia estatística dos alunos, isto é, a sua capacidade de interpretar, avaliar criticamente e comunicar acerca de informação estatística".

Claro que a educação da Estatística assume-se como um constituinte do conhecimento elementar para o sucesso do mecanismo interativo do ensino/aprendizagem de saberes e competências essenciais, fomentando a capacidade crítica e da autonomia, bem como outras áreas do conhecimento da Matemática que são trabalhados tradicionalmente no sistema educativo português (Lopes, 2008).

Neste contexto deve-se tentar compreender as dimensões mais marcantes da Estatística e a sua importância na formação dos cidadãos: a literacia estatística, o raciocínio estatístico e o pensamento estatístico.

Assim para Martins e Ponte (2010) a "literacia estatística apoia-se no pensamento estatístico e este, por sua vez, tem como núcleo fundamental o raciocínio estatístico", esclarecendo Gal (2002) que a literacia estatística é retratada como "a capacidade de interpretar, avaliar criticamente e comunicar a informação estatística". Nesta convergência surge como fundamento a noção de utilidade da Estatística para um melhor conhecimento, organização sistemática de informação, hierarquização quantitativa de dados, transmissão e comunicação de informação, de forma a capacitar as pessoas de saberes para o seu quotidiano pessoal e profissional.

No que concerne o raciocínio estatístico, o mesmo é definido por Martins e Ponte (2010) como "modos de raciocinar e resolver problemas próprios da Estatística, enfatizando técnicas, representações e processos de inferência", ou seja, dotar os alunos de ferramentas para desenvolverem processos ativos de dedução estratégica sobre o que ouvem e/ou leem sobre Estatística.

Reforçando esta premissa, Madison e Steen (2003) referem que "existem fortes laços entre pensamento estatístico, análise de dados e literacia quantitativa em termos de evolução histórica, ênfase atual e as perspetivas para o futuro". Com efeito, Martins e Ponte (2010) enfatizam que "o objetivo do ensino da estatística, a nível elementar, é, antes de mais, promover a literacia estatística, ensinando os alunos a ler e interpretar dados. Tal como foi importante para os nossos avós aprenderem a ler e contar, hoje em dia, a educação para a cidadania inclui saber ler e interpretar os números e gráficos com que nos deparamos no dia-a-dia". É provável que estejamos atualmente num estado de sociedade como resultado de um conjunto de reajustamentos importantes que foram sendo feitos ao longo dos anos no ensino da Matemática e, em particular, na área da Estatística, promovendo uma correlativa alteração das perspetivas dos jovens face ao ensino e à sociedade em que vivem.

Nesta linha de orientação de pensamento, Carvalho (2006) afirma que "a tendência para ensinar Estatística nos primeiros anos de escolaridade prende-se à razão de que nem só os adultos têm de ser críticos em relação à informação disponível para entender e comunicar ou para tomar decisões. Também as crianças estão expostas a dados estatísticos, por isso mesmo, é necessário desenvolver a sua capacidade crítica e de autonomia a fim de que tenham melhores condições para elaborar reflexões, emitir opiniões e/ou tomar decisões." Reconhece-se que nesta era da globalização, e num contexto de multi-informação, as pessoas são expostas a dados com diferentes apresentações, grafismos, permitindo diferentes visionamentos e formas de interpretação mais consistentes.

Assim e de forma a dotar os alunos de capacidades de leitura e saberem o significado de determinada informação que lhes é transmitida o Programa de Matemática do Ensino Básico do Ministério da Educação (2007) preconiza que "para isso devem desde cedo "lidar" com esses termos [estatísticos] e representações e (...) desenvolver progressivamente a capacidade não só de interpretar, como de selecionar e criticar a informação que recebem" (ME, 2007).

Reveste-se, desta maneira, de importância acrescida a formação dos alunos, alicerçada no desenvolvimento de tarefas estatísticas que permitam a "problematização, pois assim como os conceitos matemáticos, os estatísticos também devem estar inseridos em situação e vinculadas ao quotidiano deles" (Lopes, 2008).

Como se viu através da opinião de diversos autores, de políticas públicas adotadas, assumidas no âmbito do quadro de programas de ensino, a abordagem à Estatística é crucial no crescimento educacional e formativo dos alunos, pois permite que os mesmos entendam melhor o que os rodeia, saibam enquadrar as diferentes lógicas de leitura e interpretação de dados a situações de vida real, suscitando nos mesmos capacidades ao nível da autonomia e de emissão de opiniões críticas sobre assuntos prementes da sociedade em que vivem.

2.2 Organização e Tratamento de Dados no Programa de Matemática no 2º e 3º ciclos

Numa análise ao Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em dezembro de 2007, observa-se a existência de alterações ao nível da profundidade requerida, da distribuição dos conteúdos e competências a trabalhar em cada ciclo do Ensino Básico. Assim, o tema dedicado à Estatística surge reformulado, denominando-se de "Organização e Tratamento de Dados". Destaca-se o facto da Estatística ser apresentada como um tema reforçado em todos os ciclos do Ensino Básico.

Atualmente encontra-se em vigor o Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado a 17 de junho de 2013, bem como as Metas Curriculares de Matemática que constituem o normativo legal para a disciplina de Matemática no Ensino Básico. As Metas Curriculares reforçam o estatuto preponderante do tema OTD e, em particular, explicitam os desempenhos a atingir pelos alunos no final de cada ano de escolaridade.

Na convergência das Metas Curriculares, articuladas com o presente Programa, promove-se uma construção consistente e coerente do conhecimento. Neste momento, este programa está a ser implementado no 1º e 2º ciclos e, ainda, no sétimo e oitavos anos, do Ensino Básico. Em relação ao 9º ano permanece o programa de Matemática do Ensino Básico de 2007.

Assim apresenta-se, numa primeira abordagem, os conteúdos referentes ao Domínio OTD para 2º e 3º ciclos (7º e 8º anos) que constam do Programa de Matemática de 2013, bem como a articulação com as Metas Curriculares onde constam os objetivos gerais que são especificados por descritores.

2.2.1 Conteúdos e Metas Curriculares de OTD do Programa de Matemática no 2º e 3º ciclos

2.2.1.1 Conteúdos e Metas Curriculares de OTD para o 2º ciclo

Em relação ao 2º ciclo, no domínio da Organização e Tratamento de Dados, retomam-se várias representações de conjuntos de dados e noções estatísticas elementares como a média, a moda e a amplitude.

Para o 2º ciclo e de acordo com as Metas Curriculares apresenta-se a leitura que se deve fazer das mesmas:

- «Identificar», «designar»: o aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de maneira equivalente, ainda que informal.

- «Estender»: O aluno deve saber definir o conceito como se indica ou de forma equivalente, ainda que informal, reconhecendo que se trata de uma generalização.
- «Reconhecer»: O aluno deve conhecer o resultado e saber justificá-lo, eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares. No caso das propriedades mais complexas, os alunos devem apenas saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados pelo professor para as deduzir, bem como saber ilustrá-las utilizando exemplos concretos. No caso das propriedades mais simples, os alunos poderão ser chamados a apresentar de forma autónoma uma justificação geral um pouco mais precisa.
- «Saber»: Pretende-se que o aluno conheça o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

Nas tabelas 2.1 e 2.2 apresentam-se os conteúdos e as Metas Curriculares para cada ano do 2º ciclo. Em relação ao 5º ano um dos conteúdos a trabalhar em relação ao domíono OTD são os gráficos cartesianos, mas por opção nesta dissertação não se irá abordar este tópico e desta forma não se apresenta na tabela 2.1. Por este motivo na coluna referente às Metas Curriculares/Descritores inicia-se com o descritor 2.

- 5º ano

Conteúdos	Metas Curriculares/Descritores
Representação e tratamento de dados - Tabelas de frequências absolutas e relativas; - Gráficos de barras e de linhas; - Média aritmética; - Problemas envolvendo a média e a moda; - Problemas envolvendo dados em tabelas, diagramas e gráficos.	2. **Organizar e representar dados** 2.1 - Construir tabelas de frequências absolutas e relativas reconhecendo que a soma das frequências absolutas é igual ao número de dados e a soma das frequências relativas é igual a 1. 2.2 - Representar um conjunto de dados em gráfico de barras. 2.3 - Identificar um «gráfico de linha» como o que resulta de se unirem, por segmentos de reta, os pontos de abcissas consecutivas de um gráfico cartesiano constituído por um número finito de pontos, em que o eixo das abcissas representa o tempo.

	3. **Tratar conjuntos de dados** 3.1 - Identificar a «média» de um conjunto de dados numéricos como o quociente entre a soma dos respetivos valores e o número de dados, e representá-la por «$\bar{x}$». 4. **Resolver problemas** 4.1 - Resolver problemas envolvendo a média e a moda de um conjunto de dados, interpretando o respetivo significado no contexto de cada situação. 4.2 - Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em tabelas de frequência, diagramas de caule-e-folhas, gráficos de barras e de linhas.

Tabela 2.1: Conteúdos/Metas para o 5º ano. Fonte: adaptado de (MEC, 2013) e de (MEC, 2012)

- 6º ano

Conteúdos	Metas Curriculares/Descritores
Representação e tratamento de dados - População e unidade estatística; - Variáveis quantitativas e qualitativas; - Gráficos circulares; - Análise de conjuntos de dados a partir da média, moda e amplitude; - Problemas envolvendo dados representados de diferentes formas.	1. **Organizar e representar dados** 1.1 - Identificar «população estatística» ou simplesmente «população» como um conjunto de elementos, designados por «unidades estatísticas», sobre os quais podem ser feitas observações e recolhidos dados relativos a uma característica comum. 1.2 - Identificar «variável estatística» como uma característica que admite diferentes valores (um número ou uma modalidade), um por cada unidade estatística. 1.3 - Designar uma variável estatística por «quantitativa» ou «numérica» quando está associada a uma característica suscetível de ser medida ou contada e por «qualitativa» no caso contrário.

	1.4 - Designar por «amostra» o subconjunto de uma população formado pelos elementos relativamente aos quais são recolhidos dados, designados por «unidades estatísticas», e por «dimensão da amostra» o número de unidades estatísticas pertencentes à amostra. 1.5 - Representar um conjunto de dados num «gráfico circular» dividindo um círculo em setores circulares sucessivamente adjacentes, associados respetivamente às diferentes categorias/classes de dados, de modo que as amplitudes dos setores sejam diretamente proporcionais às frequências relativas das categorias/classes correspondentes. 1.6 - Representar um mesmo conjunto de dados utilizando várias representações gráficas, selecionando a mais elucidativa de acordo com a informação que se pretende transmitir. 2. **Resolver problemas** 2.1 - Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados de diferentes formas. 2.2 - Resolver problemas envolvendo a análise de um conjunto de dados a partir da respetiva média, moda e amplitude.

Tabela 2.2: Conteúdos/Metas para o 6º ano. Fonte: adaptado (MEC, 2013) e de (MEC, 2012)

2.2.1.2 Conteúdos e Metas Curriculares de OTD para os 7º e 8º anos do 3º ciclo

Em relação ao 3º ciclo, no domínio Organização e Tratamento de Dados, são introduzidas algumas medidas de localização e dispersão de um conjunto de dados.

Para o 3º ciclo e de acordo com as metas curriculares para o 7º e 8º anos apresenta-se a leitura que se deve fazer das mesmas:

- «Identificar», «designar»: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

- «Reconhecer»: Pretende-se que o aluno consiga apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve no entanto saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

- «Reconhecer, dado ...,»: Pretende-se que o aluno justifique o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.

- «Saber»: Pretende-se que o aluno conheça o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

- «Provar», «Demonstrar»: Pretende-se que o aluno apresente uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

- «Estender»: Este verbo é utilizado em duas situações distintas. Em alguns casos, para estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida; nesse caso o aluno deve saber definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização. Noutros casos, trata-se da extensão de uma propriedade a um universo mais alargado; do ponto de vista do desempenho do aluno pode entender-se como o verbo «reconhecer» com um dos dois significados acima descritos.

- «Justificar»: O aluno deve saber justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Nas tabelas 2.3 e 2.4 apresentam-se os conteúdos e as metas curriculares para os 7º e 8º anos do 3º ciclo, no domínio de OTD.

- 7ºano

Conteúdos	**Metas Curriculares/Descritores**
Medidas de localização - Sequência ordenada dos dados; - Mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades; - Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.	1. **Representar, tratar e analisar conjuntos de dados** 1.1 - Construir, considerado um conjunto de dados numéricos, uma sequência crescente em sentido lato repetindo cada valor um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta, designando-a por «sequência ordenada dos dados» ou simplesmente por «dados ordenados».

	1.2 - Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos, a «mediana» como o valor central no caso de n ser ímpar (valor do elemento de ordem $\frac{n+1}{2}$ da sequência ordenada dos dados), ou como a média aritmética dos dois valores centrais (valores dos elementos de ordens $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$ da sequência ordenada dos dados) no caso de n ser par e representar a mediana por «$\tilde{x}$»» ou «Me»». 1.3 - Determinar a mediana de um conjunto de dados numéricos. 1.4 - Reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana. 1.5 - Designar por «medidas de localização» a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados. 2. **Resolver problemas** 2.1 - Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em tabelas de frequência, diagramas de caule-e-folhas, gráficos de barras e gráficos circulares.

Tabela 2.3: Conteúdos/Metas para o 7º ano. Fonte: adaptado (MEC, 2013) e de (MEC, 2012)

- 8ºano

Conteúdos	**Metas Curriculares/Descritores**
Diagramas de extremos e quartis - Noção de quartil; - Diagramas de extremos e quartis; - Amplitude interquartil; - Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.	1. **Representar, tratar e analisar conjuntos de dados** 1.1 - Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos (sendo n ímpar), o «primeiro quartil» (respetivamente «terceiro quartil») como a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior (respetivamente superior) a $\frac{n+1}{2}$ na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.

	1.2 - Identificar, dado um conjunto de n dados numéricos (sendo n par), o «primeiro quartil» (respetivamente «terceiro quartil») como a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior ou igual a $\frac{n}{2}$ (respetivamente superior ou igual a e $\frac{n}{2}+1$) na sequência ordenada do conjunto inicial de dados. 1.3 - Identificar, considerado um conjunto de dados numéricos, o «segundo quartil» como a mediana desse conjunto e representar os primeiro, segundo e terceiro quartis respetivamente por Q_1, Q_2 e Q_3. 1.4 - Reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que a percentagem de dados não inferiores (respetivamente não superiores) ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 75%. 1.5 - Representar conjuntos de dados quantitativos em diagramas de extremos e quartis. 1.6 - Identificar a «amplitude interquartil» como a diferença entre o 3.º quartil e o 1.º quartil ($Q_3 - Q_1$) e designar por «medidas de dispersão» a amplitude e a amplitude interquartis. 2. **Resolver problemas** 2.1 - Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em gráficos diversos e em diagramas de extremos e quartis.

Tabela 2.4: Conteúdos/Metas para o 8º ano. Fonte: adaptado de (MEC, 2013) e de (MEC, 2012)

No Programa de Matemática está descrito que "tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares"(MEC, 2013).

Concomitantemente dever-se-á potenciar os conhecimentos e a experiência acumulada quer pelos professores, quer pelas escolas como uma mais valia para a implementação bem sucedida do projeto educativo, fomentando desta forma uma liberdade pedagógica e de práticas educativas. Neste sentido o Programa reconhece e valoriza a autonomia dos professores e das escolas, não impondo portanto metodologias específicas.

2.3 Conceitos de OTD

Cada vez mais é reconhecida a importância da Estatística no currículo dos alunos. Como já foi referido anteriormente este tema tem sido inserido nos programas de Matemática e atualmente designa-se por Organização e Tratamento de Dados.

A Estatística é encarada como uma área favorável ao desenvolvimento de certas capacidades expressas nos currículos, tais como interpretar e intervir no real; formular e resolver problemas; comunicar; manifestar rigor e espírito crítico; e ainda a aquisição de uma atitude positiva face à Ciência. Deste modo, ensinar Estatística não pode limitar-se ao ensino de técnicas e fórmulas e aprender Estatística não pode ser aprender a aplicar rotineiramente procedimentos desinseridos de contextos, sem ter de interpretar, de analisar e de criticar (Martins et al, 1997).

Neste sentido, é importante que os alunos desenvolvam capacidades associadas à recolha, organização e análise de dados, assim como à representação e comunicação de processos e resultados.

De seguida apresentam-se os conceitos relacionados com a recolha, organização e apresentação de dados, bem como algumas medidas estatísticas próprias para a análise e interpretação dos dados, de acordo com o definido no Programa de Matemática (2013) e das Metas Curriculares (2012), para o 2º e 3º ciclos (em particular para o sétimo e oitavos anos).

2.3.1 Recenseamento e sondagem

O termo recenseamento está, regra geral, associado à contagem oficial e periódica dos indivíduos de um país, ou parte de um país. Ele abrange, no entanto, um leque mais vasto de situações. Assim pode definir-se recenseamento do seguinte modo:

Definição 2.1. ***Recenseamento*** - *Estudo científico de um universo de pessoas, instituições ou objetos físicos com o propósito de adquirir conhecimentos, observando todos os seus elementos, e fazer juízos quantitativos acerca de caraterísticas importantes desse universo (Martins e Ponte, 2010).*

Em Portugal, o INE, Instituto Nacional de Estatística, tem a seu cargo fazer recenseamentos da população portuguesa, o último dos quais, o XV Recenseamento Geral da População, foi realizado em 2011. Os dados relativos aos censos são extremamente importantes pois têm influência direta na decisão em assuntos de interesse nacional e local, como por exemplo na educação, emprego, saúde, transportes, recursos naturais, etc. Se se compararem os resultados de recenseamentos sucessivos pode-se extrapolar e predizer padrões futuros da população.

A realização de recenseamentos é, por vezes, bastante dispendiosa, pelo facto de ser necessário observar exaustivamente todos os elementos da população, principalmente se o número de elementos desta for elevado.

Quando o número de elementos da população é infinito, ou a recolha de dados implica a destruição dos elementos (por exemplo: a resistência ao choque de determinado modelo automóvel), a realização de um recenseamento é completamente impossível.

Por estes motivos, muitos dos estudos estatísticos são efetuados observando apenas um subconjunto da população. Surge, então o conceito de sondagem que podemos definir como:

Definição 2.2. ***Sondagem*** *— Estudo científico de uma parte da população com o objetivo de analisar atitudes, hábitos e preferências da população relativamente a acontecimentos, circunstâncias e assuntos de interesse comum (Martins et al, 1997).*

As sondagens restringem-se a inquirir ou analisar apenas uma parte da população em estudo - amostra. O objetivo é tirar conclusões para todos os elementos da população dos resultados observados na amostra.

Uma sondagem realiza-se em várias fases: escolha da amostra, obtenção da informação, análise de dados e relatório final.

2.3.2 População e amostra

Quer se trate de uma sondagem ou não, a maior parte das situações em que é necessário utilizar técnicas estatísticas envolve a necessidade de tirar conclusões gerais acerca de um grande conjunto de indivíduos, baseando-nos num número restrito desses indivíduos. Surge assim a necessidade de definir os conceitos de População e Amostra.

Definição 2.3. ***População*** *— é o conjunto de objetos, indivíduos ou resultados experimentais com uma ou mais características em comum, que se pretendem analisar. A cada elemento da população designamos por* ***unidade estatística*** *(Martins, 2005).*

Exemplo 2.1. *O conjunto dos cidadãos eleitores para a Assembleia da República de 5 de junho de 2011.*

Definição 2.4. ***Amostra*** *— subconjunto da população, que se observa com o objetivo de tirar conclusões para a população de onde foi recolhida. Ao número de elementos da amostra designamos por* ***dimensão da amostra*** *(Martins, 2005).*

Exemplo 2.2. *Tendo em conta o exemplo da população apresentado anteriormente, uma amostra de cidadãos eleitores pode ser obtida selecionando casualmente 1000 cidadãos à boca das urnas.*

Tendo em consideração o objetivo de retirar conclusões para a população, a fase do processo estatístico da recolha da amostra é muito importante, pois a mesma deve ser tão representativa quanto possível da população.

A forma de seleção de uma amostra a partir da população, designada por processo de amostragem, é determinante para a qualidade das inferências que se venham a fazer. Quando são usadas técnicas apropriadas e a amostra é representativa da população os resultados obtidos encontram-se em geral perto dos resultados que se obteriam, se o estudo fosse realizado à população.

Quando uma amostra não é representativa da população, diz-se que é enviesada. A sua utilização para estimar características da população pode ter consequências graves, na medida em que a amostra pode apresentar propriedades que não refletem as propriedades da população.

Exemplo 2.3.

- *Amostra - Utilizar alguns alunos de uma turma, para tirar conclusões sobre o aproveitamento de todos os alunos da escola.*

- *Resultado - Poderíamos concluir que o aproveitamento dos alunos é pior ou melhor do que na realidade é. As turmas de uma escola não são todas homogéneas, pelo que a amostra não é representativa dos alunos da escola. Poderia servir para tirar conclusões sobre a população constituída pelos alunos da turma.*

2.3.3 Dados estatísticos e variáveis estatísticas

Como foi mencionado anteriormente o objetivo da estatística é o estudo das populações, conjunto de indivíduos/unidades estatísticas com caraterísticas em comum. A uma caraterística comum, que assume valores diferentes designamos por variável.

Definição 2.5. ***Variável estatística, atributo ou carateres estatísticos*** *— É uma caraterística de um indivíduo (ou unidade estatística que não necessariamente pessoa) à qual se possa atribuir um número ou uma categoria (Martins e Ponte, 2010).*

Definição 2.6. ***Dado estatístico ou dado*** *— resultado obtido da observação de uma variável de um indivíduo/unidade estatística (Martins e Ponte, 2010).*

As variáveis podem ser qualitativas ou quantitativas.

Definição 2.7. ***As variáveis são quantitativas*** *— quando representam a informação resultante de caraterísticas suscetíveis de serem medidas, apresentando-se com diferentes intensidades passíveis de ser traduzidas por números (Martins, 2005).*

As variáveis quantitativas podem ser de natureza discreta ou contínua.

Definição 2.8. ***Uma variável é quantitativa discreta*** *— se tomar apenas um nº finito (ou infinito numerável) de valores distintos (Murteira et al, 2007).*

Exemplo 2.4.

- *número de acidentes, por dia, num determinado cruzamento;*
- *número de filhos das famílias que vivem num prédio;*
- *número de golos marcados por uma equipa nas diferentes jornadas de um campeonato.*

Definição 2.9. ***Uma variável é quantitativa contínua*** *— se tomar qualquer valor numérico, compreendido no seu intervalo de variação (Martins et al, 1997).*

Exemplo 2.5.

- *Peso dos recém-nascidos durante um mês, numa maternidade;*
- *Altura dos alunos de uma turma.*

Definição 2.10. ***Uma variável é qualitativa*** *— quando representa a informação que identifica alguma qualidade, categoria ou característica, não suscetível de medida, mas de classificação, assumindo várias modalidades (Martins et al, 1997).*

Exemplo 2.6.

- *estado civil de um indivíduo;*
- *cor dos olhos;*
- *a profissão de uma pessoa;*
- *código postal.*

Resumidamente:

$$\text{variáveis} \begin{cases} \text{qualitativas} \\ \text{quantitativas} \begin{cases} \text{discretas} \\ \text{contínuas} \end{cases} \end{cases}$$

2.3.4 Organização e apresentação dos dados

Em muitas situações, analisar um conjunto de dados torna-se cansativo e por vezes difícil, quando o número de informações é demasiado, perturbando a visualização de diferenças básicas entre essas informações. Para resolver esta situação, sem necessariamente abandonar os dados numéricos, tornam-se úteis as representações em tabela e gráfico como forma de se obter um primeiro entendimento do problema e avaliar conclusões prévias. A tabela é uma forma importante de representação de dados pelo seu aspeto descritivo e facilidade na investigação de estudos específicos, explicitando as variáveis e as suas unidades.

A forma de organizar a informação depende, em grande parte, do tipo de variáveis em estudo. Neste trabalho iremos apresentar formas de organizar a informação contida nos dados através de tabelas e representações gráficas mais adequadas, de forma a realçar as caraterísticas mais importantes, e dependendo do tipo de dados a analisar, de acordo com o que está previsto no Programa de Matemática e nas Metas Curriculares para os 2º e 3º ciclos, em particular 7º e 8º anos.

É importante que os alunos ganhem sensibilidade para as diversas formas e a sua adequação em função da natureza das variáveis em jogo (Martins e Ponte, 2010).

2.3.4.1 Tabelas e gráficos para dados qualitativos

Tabelas de frequência

A tabela é uma forma importante de representação de dados pelo seu aspeto descritivo e facilidade na investigação de estudos específicos, explicitando as variáveis e as suas unidades.

Numa tabela de frequências para dados qualitativos ou categóricos a informação é organizada, de um modo geral, em três ou quatro colunas: coluna das categorias ou modalidades - onde se indicam todas as categorias da variável em estudo; coluna das frequências absolutas - onde se regista o total de elementos da amostra que pertencem a cada categoria; coluna das frequências relativas - onde se coloca, para cada categoria, o valor que se obtém dividindo a respetiva frequência absoluta pela dimensão da amostra; e por último a coluna das frequências relativas em percentagem que se obtém multiplicando a frequência relativa por 100.

Definição 2.11. ***Frequência absoluta ou f_i de uma modalidade****, onde i=1, ..., k, representa uma das k modalidades — é o número de elementos da amostra iguais a essa modalidade (Martins e Ponte, 2010).*

Definição 2.12. ***Frequência relativa ou fr_i de uma modalidade****, onde i=1, ..., k, representa uma das k modalidades — é o quociente entre a frequência absoluta (f_i) e o número total de observações (dados), (n) . Ou seja,*

$$fr_i = \frac{f_i}{n} \tag{3.1}$$

(Martins e Ponte, 2010).

Uma tabela de frequências reflete a forma da distribuição da variável, na amostra em estudo, isto é, quais as categorias ou modalidades que assume assim como a frequência (absoluta ou relativa) com que assume essas modalidades.

Exemplo 2.7. *de uma tabela de frequências onde se encontram registadas as classificações dos alunos de uma turma, utilizando as modalidades: Mau, Medíocre, Suficiente, Bom e Muito Bom.*

Classificação	nº de alunos (fi)	$fr_i = \frac{f_i}{n}$	$fr_i\% = fr_i \times 100$
Mau	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10%
Medíocre	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20%
Suficiente	6	$\frac{6}{20} = 0,3$	30%
Bom	5	$\frac{5}{20} = 0,25$	25%
Muito Bom	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	15%
Total (n)	20	1	100

Tabela 2.5: Tabela de frequências: Classificações

Quando se organizam os dados de uma amostra numa tabela de frequências, um processo de fácil verificação de que as frequências devem estar bem calculadas, consiste em verificar que:

- A soma das frequências absolutas é igual à dimensão da amostra;

  No caso geral, se a variável assume k categorias distintas, tem-se:

$$f_1 + f_2 + ... + f_k = n \tag{3.2}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$$

- A soma das frequências relativas é igual a 1.

  No caso geral, se a variável assume k categorias distintos, tem-se:

$$fr_1 + fr_2 + ... + fr_k = 1 \tag{3.3}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{k} fr_i = 1$$

A partir das tabelas de frequências podem-se tirar algumas conclusões relativamente aos dados recolhidos.

Em relação à tabela 2.5 podemos, por exemplo, afirmar:

- que a classificação mais frequente foi suficiente;
- que mau foi a classificação obtida por um menor número de alunos;
- quantos alunos tem a turma.

Em muitas situações as frequências relativas são dízimas infinitas obrigando, por isso, a arredondamentos. Estes têm de ser feitos com algum cuidado, de modo a que o total seja igual a 1.

A utilização das frequências relativas permite comparar duas amostras que digam respeito à mesma variável, mas com dimensões diferentes.

Exemplo 2.8. *Um professor tem duas turmas do 10º ano. A turma A, com 18 alunos e a turma B com 25 alunos. O professor aplicou o mesmo teste às duas turmas e pretende comparar os resultados. Para tal construiu a tabela de frequências 2.6:*

	Turma A		Turma B	
Avaliação	f_i	fr_i	f_i	fr_i
Negativa	4	$\frac{4}{18} \approx 0,222$	5	$\frac{5}{25}$=0,2
Positiva	14	$\frac{14}{18} \approx 0,778$	20	$\frac{20}{25}$=0,8

Tabela 2.6: Tabela de frequências: Avaliação

Através da tabela 2.6 pode-se observar que na turma A, apesar de haver menos negativas do que na turma B, a percentagem de insucesso foi maior.

Gráfico de barras

A representação gráfica é uma ferramenta poderosa na visualização do comportamento de uma determinada variável. Uma das representações gráficas mais utilizadas é o gráfico de barras. Neste tipo de gráfico desenha-se uma barra para cada categoria, sendo a altura da barra proporcional ao número de casos observados nessa categoria (frequência absoluta). Estas barras podem dispor-se ao longo de um eixo horizontal ou vertical.

A ordem pela qual se colocam as barras é qualquer, salvo se existir alguma ordem subjacente. Neste caso, deve-se respeitar a ordem colocando, da esquerda para a direita as diversas categorias, partindo da de menor nível para a de maior nível. Na ausência de ordem subjacente por vezes opta-se por representar as barras por ordem decrescente ou crescente das frequências.

Não existem regras para a largura das barras nem para qualquer forma de acabamento gráfico: cor, textura, grossura dos traços, etc. No entanto, deve ter-se em atenção que as barras, no mesmo gráfico, devem ter a mesma largura, pois a mensagem que transmitem é a que está contida nas alturas, e umas barras mais largas do que outras poderiam chamar mais a atenção, induzindo em erro.

A principal vantagem dos gráficos relativamente às tabelas de frequências está na rapidez da leitura. Não só há uma perceção imediata de qual a categoria de maior frequência, como também se fica com uma noção bastante precisa de qual a ordem de grandeza de cada categoria relativamente às restantes (Martins e Ponte, 2010).

Para construir um gráfico de barras deve-se ter em conta os seguintes aspetos:

- o nome da variável em estudo;
- os nomes das categorias que a variável assume, num dos eixos;
- uma escala no outro eixo. Nesta escala devem estar assinaladas as frequências absolutas ou relativas referentes a cada categoria que a variável assume.

Apresenta-se um exemplo de um gráfico de barras:

Exemplo 2.9. *A professora de Matemática perguntou a cada aluno do 7ºA qual era a sua fruta preferida. Registou os dados na tabela 2.7 e sugeriu aos alunos que construíssem um gráfico de barras com base nos dados apresentados.*

Fruta Preferida	Nº de alunos
Morango	6
Maçã	4
Laranja	2
Cereja	8

Tabela 2.7: Tabela de frequências absolutas: Fruta Preferida

Resposta

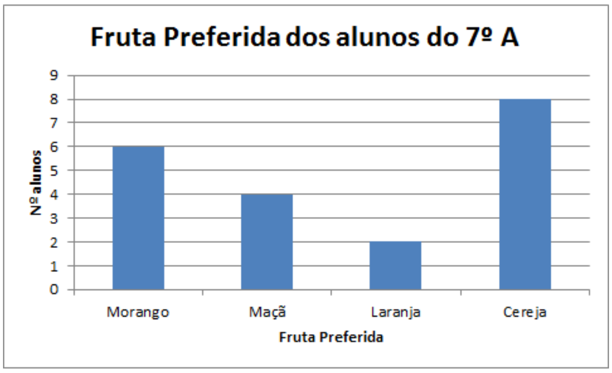


Figura 2.1: Gráfico de barras: Fruta Preferida

Da análise do gráfico pode-se concluir, por exemplo, que a fruta preferida pela maioria dos alunos é cereja, e aquela que um menor número de alunos prefere é a laranja.

Gráficos circulares

Como o nome sugere esta representação é constituída por um círculo que representa a forma como o conjunto de dados se distribui pelas categorias. O círculo é dividido em setores circulares, em que o número de setores circulares é igual ao número de categorias que a variável qualitativa assume. O ângulo de cada setor é proporcional à frequência de cada categoria. Para determinar a amplitude do ângulo correspondente a cada setor multiplica-se a frequência relativa por 360º.

Os gráficos circulares são usados essencialmente para dados qualitativos. Este tipo de gráficos é muito útil quando o que se pretende realçar é a forma como os dados se distribuem pelas categorias, uma vez que representa a fração de cada categoria como parte do todo, em que este "todo" é representado pelo círculo e equivale a 100%.

Na construção de um gráfico circular deve ter-se em conta que:

- a amplitude de cada setor circular é proporcional à frequência que representa;

- a legenda pode ser dispensada, inscrevendo-se as categorias que a variável assume e as suas frequências nos respetivos setores circulares;

- podem usar-se cores diferentes para os diferentes setores circulares.

Exemplo 2.10. *Num concurso de fotografia, na escola do João, inscreveram-se 40 jovens e registou-se a cor dos olhos de cada um destes jovens. Na aula de Matemática a professora apresentou os dados que constam na tabela 2.8 e sugeriu aos alunos que construissem um gráfico circular.*

Resolução

cor dos olhos	f_i	fr_i	Amplitude ângulo $= fr_i \times 360^o$
Azuis	10	$\frac{10}{40} = 0,25$	$0,25 * 360 = 90^o$
Verdes	6	$\frac{6}{40} = 0,15$	$0,15 * 360 = 54^o$
Castanhos	22	$\frac{22}{40} = 0,55$	$0,55 * 360 = 198^o$
Pretos	2	$\frac{2}{40} = 0,05$	$0,05 * 360 = 18^o$

Tabela 2.8: Tabela de frequências: Cor dos olhos

Após o preenchimento da tabela, construiu-se o gráfico circular:

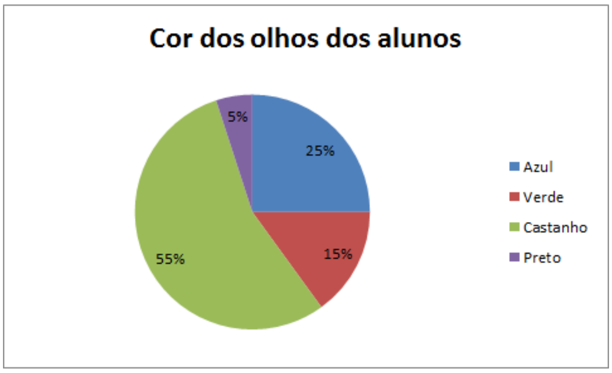


Figura 2.2: Gráfico circular: Cor dos olhos

Por observação do gráfico, verifica-se que, por exemplo:

- *A maior parte dos alunos que participaram no concurso tinham olhos castanhos;*

- *25% dos alunos tinham olhos azuis;*

- *40% dos alunos têm olhos claros.*

A utilização dos gráficos circulares merece alguns cuidados, nomeadamente, quando o número de categorias que a variável assume for demasiado grande e/ou houver categorias que tenham valores muito próximos. Assim, a informação que se pretende transmitir pode tornar-se confusa. Nestas situações será preferível optar por um gráfico de barras uma vez que se torna mais fácil de visualizar e comparar as frequências das diferentes categorias (Martins e Ponte, 2010).

2.3.4.2 Tabelas e gráficos para dados quantitativos discretos

Como foi referido anteriormente na definição 2.8, uma variável de natureza quantitativa diz-se discreta se o conjunto de valores que pode assumir for finito ou infinito numerável (isto é, pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca com os números naturais). Na prática, as variáveis discretas resultam quase sempre de contagens: número de filhos de cada família, número de carros que passam numa ponte por unidade de tempo, etc.

O resultado da observação destas variáveis são dados discretos. A construção da tabela de frequências para os dados quantitativos discretos é idêntica à construída para dados qualitativos, considerando-se neste caso como classes os diferentes valores que surgem na amostra.

Assim, os dados discretos são organizados numa tabela de frequências, com várias colunas. Na primeira coluna, a das classes, indicam-se todos os valores distintos, x_i, presentes na amostra a analisar. Nesta coluna os valores distintos que a variável assume devem estar ordenados; na coluna seguinte, a das frequências absolutas, f_i, regista-se o número de vezes que cada valor aparece na amostra. Numa terceira coluna, a das frequências relativas, fr_i, regista-se, para cada classe, o valor que se obtém dividindo a frequência absoluta pela dimensão da amostra (número de elementos - n); pode-se ainda considerar uma quarta coluna onde se regista a frequência relativa em percentagem. Pode, ainda, incluir-se na tabela mais duas/três colunas para a frequência absoluta acumulada, frequência relativa acumulada e frequência relativa acumulada em percentagem, que são definidas do seguinte modo:

Definição 2.13. ***Frequência absoluta acumulada ou F_i de índice i**, onde i=1, ..., k, representa uma das k classes — é a soma das frequências absolutas dos valores da variável desde o primeiro até ao de ordem i, inclusive.*

À frequência absoluta de um valor acumulam-se as anteriores. A frequência absoluta acumulada de ordem i representa-se por F_i e é dada por:

$$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$$

(Costa e Rodrigues, 2014).

Definição 2.14. ***Frequência relativa acumulada ou*** Fr_i ***de índice i****, onde i=1, ..., k, representa uma das k classes — é a soma das frequências relativas dos valores da variável desde o primeiro até ao de ordem i, inclusive.*

À frequência relativa de um valor acumulam-se as anteriores. A frequência relativa acumulada de ordem i representa-se por Fr_i *e é dada por:*

$$Fr_i = fr_1 + fr_2 + ... + fr_i$$

(Costa e Rodrigues, 2014).

Exemplo 2.11. *A professora perguntou a cada aluno o número de pães que cada um come por dia. Os resultados foram os seguintes:*

2	5	3	4	2	3	2	3	5
3	5	4	3	4	3	4	1	
2	1	2	3	5	3	3	4	

Tabela 2.9: Número de pães

Com base nos dados apresentados constrói uma tabela de frequências.

Resolução

Neste estudo tem-se:

- *a variável "número de pães que cada aluno come por dia"é quantitativa discreta;*
- *a dimensão da população é 25 (n=25);*
- *os valores ordenados que a variável assume são: 1, 2, 3, 4, 5.*

Nº de pães	f_i	$fr_i = \frac{f_i}{total}$	$fr_i\% = fri \times 100$	F_i	Fr_i	$Fr_i\%$
1	2	$\frac{2}{25} = 0,08$	$0,08 \times 100 = 8\%$	2	0,08	8%
2	5	$\frac{5}{25} = 0,2$	$0,2 \times 100 = 20\%$	7	0,28	28%
3	9	$\frac{9}{25} = 0,36$	$0,36 \times 100 = 36\%$	16	0,64	64%
4	5	$\frac{5}{25} = 0,2$	$0,2 \times 100 = 20\%$	21	0,84	84%
5	4	$\frac{4}{25} = 0,16$	$0,16 \times 100 = 16\%$	25	1	100%
Total:	25	1	100%			

Tabela 2.10: Tabela de frequências: Nº de pães

Após a análise da informação a partir da tabela de frequências conclui-se, por exemplo, que:

- *apenas dois alunos consomem um pão por dia;*
- *a maioria dos alunos consome três pães por dia, o que corresponde a 36%;*
- *16 alunos não comem mais de quatro pães por dia.*

No preenchimento da tabela também se constata que:

- *a soma das frequências absolutas é igual à dimensão da população em estudo;*
- *a soma das frequências relativas, quando representadas em fração ou número decimal, é igual a 1. No caso destas estarem representadas em percentagem a soma é igual a 100%.*

No caso geral, se a variável assume k valores distintos, tem-se:

- $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$;
- $\sum_{i=1}^{k} fr_i = 1$;
- $F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$;
- $Fr_k = \sum_{i=1}^{k} fr_i$.

Gráficos de barras

No caso de dados discretos, a construção da tabela de frequências resume-se, de um modo geral, a considerar como classes os diferentes valores que surgem na amostra. Uma representação gráfica adequada para estes dados, é o gráfico de barras. Esta representação gráfica, semelhante à que se analisou para os dados qualitativos, consiste em marcar num sistema de eixos coordenados, no eixo dos xx, o valor das classes e nesses pontos barras verticais de altura igual à frequência absoluta ou à frequência relativa.

Em suma, algumas considerações sobre a metodologia a seguir na construção do diagrama de barras:

- ordenar a amostra e considerar para classes os diferentes valores aí definidos. Marcar essas classes no eixo dos xx, num sistema de eixos coordenados;
- nos pontos onde se consideraram as classes, marcar barras de altura igual à frequência absoluta ou relativa, da respetiva classe. De preferência utilizar as frequências relativas, pois para comparar diagramas de barras de amostras diferentes, temos a garantia de que a soma das barras é igual a 1.

Exemplo 2.12. *Na tabela 2.11 estão registados os dados relativos ao número de acidentes, no mês de abril, numa estrada considerada perigosa.*

Nº de acidentes	Nº de dias
1	10
2	5
4	3
5	2
Total:	20

Tabela 2.11: Tabela de frequências: Nº de acidentes

Com base nos dados apresentados na tabela de frequências absolutas, constrói um gráfico de barras.

Resolução:

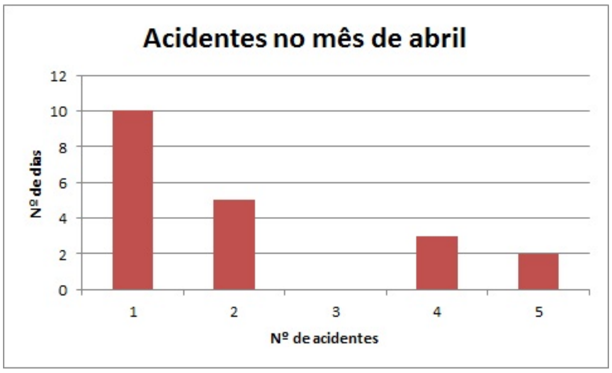


Figura 2.3: Gráfico de barras: Nº de acidentes

Quando se representa, num mesmo gráfico de barras, a informação contida em duas, ou mais, amostras de dimensão diferente, nesse caso as alturas das barras têm de ser iguais à frequência relativa de cada categoria, pois só assim a soma das alturas das barras correspondentes a qualquer das amostras é idêntica (a soma dá sempre 1), permitindo a comparação. Se usássemos as frequências absolutas para alturas das barras dos gráficos, correspondentes às várias amostras, a comparação poderia induzir em erro, pois como a dimensão das amostras não é a mesma, estaríamos a comparar coisas diferentes.

Exemplo 2.13. *A professora de Matemática da escola do João tem as turmas A e B do 7º ano. No início do ano perguntou aos alunos o número de irmãos que cada um tinha. Os dados obtidos estão registados na tabela 2.12.*

Nº de irmãos	fi - turma A	fi - turma B
0	3	7
1	5	7
2	4	6
3	3	3
4	5	2
Total:	20	25

Tabela 2.12: Tabela de frequências: Nº de irmãos

Através dos dados representados na tabela construiu-se o gráfico de barras, que se apresenta:

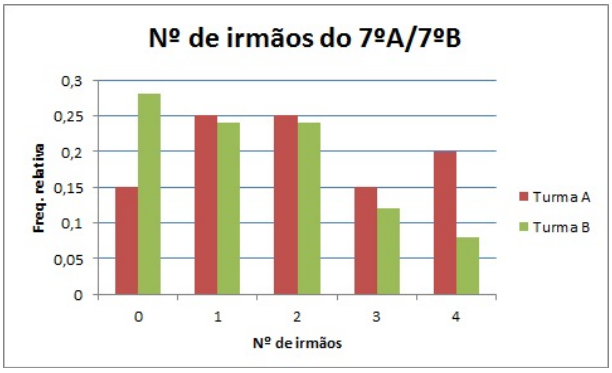


Figura 2.4: Gráfico de barras: Nº de irmãos

Com base nos resultados obtidos pode-se concluir que, por exemplo:

- *de um modo geral, os alunos da turma A têm mais irmãos que os alunos da turma B;*
- *na turma A predominam os alunos com 1 ou 2 irmãos, enquanto que na turma B predominam os alunos com 0 irmãos;*
- *enquanto que na turma A 15% dos alunos não têm irmãos na turma B esse valor aumenta para os 28%;*
- *quer na turma A quer na turma B, 3 alunos têm três irmãos, mas no entanto corresponde a 15% na turma A e a 12% na turma B. Esta análise é possível porque no gráfico está representada a frequência relativa.*

O gráfico de barras é muito utilizado para representar dados discretos, no entanto quando o número de valores distintos assumidos pela variável em estudo é grande quando comparado com as frequências absolutas não se deverá recorrer a este tipo de gráfico. Para esta situação a representação adequada será o histograma. A construção de histogramas é um dos conteúdos a abordar no 9ºano, pelo que não será retratado nesta dissertação.

Em muitas situações utilizam-se gráficos de barras para representar os próprios dados e não as frequências com que as diferentes classes ou categorias surgem no conjunto de dados que se pretende estudar. Nesta situação importa referir que os gráficos construídos não são gráficos de frequências e quando os próprios dados resultam de contagens, podem surgir confusões.

Exemplo 2.14. *Um professor queria saber qual o número de alunos de cada uma das turmas do 8º ano da sua escola. Depois de recolher a informação, organizou os dados através da tabela 2.13:*

Turma	Nº de alunos
A	25
B	24
C	20

Tabela 2.13: Tabela: Nº de alunos por turma

A tabela 2.13 não é considerada tabela de frequências, mas apenas uma tabela onde estão apresentados os dados. Nesta situação o objetivo é saber quantos alunos tem cada turma. Os dados são o número de alunos das turmas A, B e C, ou seja: 25, 24, 20.

Para representar a informação pode construir-se um gráfico, como se apresenta:

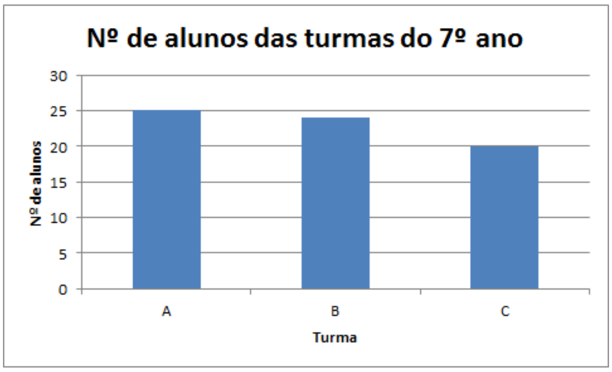


Figura 2.5: Gráfico: Nº de alunos por turma

Na representação de dados quantitativos discretos para além dos gráficos de barras existem outras representações gráficas que podem ser utilizadas, nomeadamente: o caule-e-folhas, o diagrama de extremos e quartis e ainda o gráfico de linha. O diagrama de extremos e quartis irá ser abordado nesta dissertação após o estudo da amplitude interquartil.

Diagrama de caule-e-folhas

O diagrama de caule-e-folhas pode ser encarado como uma representação intermédia entre a tabela e o gráfico, uma vez que, de um modo geral apresenta os verdadeiros valores da amostra e dá uma forma visual de como os dados estão distribuídos.

Para Martins e Ponte (2010) "a base da construção de um diagrama de caule-e-folhas está na escolha de um par de dígitos adjacentes nos dados, que vai permitir dividir cada dado do conjunto de dados em duas partes: o caule e a folha, que se dispõem para um e outro lado de um traço vertical."

Exemplo 2.15. *Para angariar novos praticantes para a modalidade de basquetebol, um clube promoveu uma atividade em que cada candidato fez 50 lançamentos da bola ao cesto. O registo do número de cestos conseguidos por cada candidato foi o seguinte:*

23, 34, 40, 45, 31, 19, 37, 25, 42, 38, 27, 35, 41, 36, 28, 18, 33, 50, 49, 39, 40, 37.

Com base nos dados obtidos constrói-se o diagrama de caule-e-folhas.

1. *Começa-se por traçar uma linha vertical e, do lado esquerdo dessa linha, escrevem-se os dígitos dominantes (os caules), neste caso os das dezenas;*
2. *Do lado direito da linha vertical são colocadas as folhas, ou seja, os dígitos não dominantes, alinhados com o respetivo caule. Exemplo: O primeiro dado é 23, o 2 é o caule e o 3 é a folha;*
3. *Repete-se o processo para todos os dados, associando a cada caule as respetivas folhas;*
4. *representam-se as folhas de cada caule por ordem crescente, obtendo-se o diagrama ordenado.*

1	8 9
2	3 5 7 8
3	1 3 4 5 6 7 7 8 9
4	0 0 1 2 5 9
5	0

Figura 2.6: Caule-e-folhas: Nº de cestos

Em relação a este tipo de representação pode-se mencionar algumas vantagens:

1. não se perde informação;
2. permite analisar se há ou não simetria na distribuição de dados;
3. permite identificar onde há maior concentração de dados;

4. torna-se bastante sugestivo para representar dois conjuntos de dados referentes à mesma caraterística representando a segunda amostra para o lado esquerdo do gráfico.

Exemplo 2.16. *Observa a distribuição das idades dos homens e das mulheres que trabalham numa pequena empresa.*

Homens		Mulheres
9 9 8	1	9
9 8 8 6 4 4	2	1 3 3 5 6 6 8
6 6 4 2 0	3	0 2 3 4 4 8 8
8 2 0	4	

Figura 2.7: Caule-e-folhas: Idade dos trabalhadores

Da leitura do diagrama, é possível tirar conclusões do tipo:

1. *a empresa tem, no total, 32 trabalhadores, sendo 17 do sexo masculino e 15 do sexo feminino;*
2. *todas as mulheres que trabalham na empresa têm menos de 40 anos;*
3. *há três homens e uma mulher com idades inferiores a 20 anos;*
4. *o trabalhador mais velho tem 48 anos de idade.*

Gráfico de linha

O gráfico de linha é uma representação gráfica frequentemente utilizada pela comunicação social, que segundo Martins e Ponte (2010), "não é mais do que uma representação gráfica da forma como duas variáveis se relacionam uma com a outra, em regra geral uma das variáveis é o tempo". Este tipo de representação gráfica é utilizada para representar, visualmente, como uma variável evolui em relação a outra variável.

Para construir um gráfico de linha basta representar no eixo horizontal os valores da variável estatística x_i e no eixo vertical os correspondentes valores das frequências. Depois de representados os pontos (x_i, f_i), obtém-se o gráfico unindo esses pontos por segmentos de reta.

Exemplo 2.17. *Uma proprietária de um café resolveu comprar uma máquina de sumos naturais. Passado alguns dias a senhora tentou averiguar se o negócio com a máquina dos sumos era rentável. Para tal pediu ajuda ao filho, que era aluno do 8º ano. O filho precisava de dados para tentar chegar a alguma conclusão. A mãe tinha registos das quantias auferidas nos últimos 20 dias: O filho registou os dados pela ordem que os dados foram recolhidos, sendo: 30, 10, 20, 30, 10, 20, 20, 30, 30, 30, 20, 30, 40, 30, 30, 40, 50, 40, 40, 50. O aluno começou por construir um gráfico de linhas para perceber a evolução das quantias auferidas nos últimos 20 dias.*

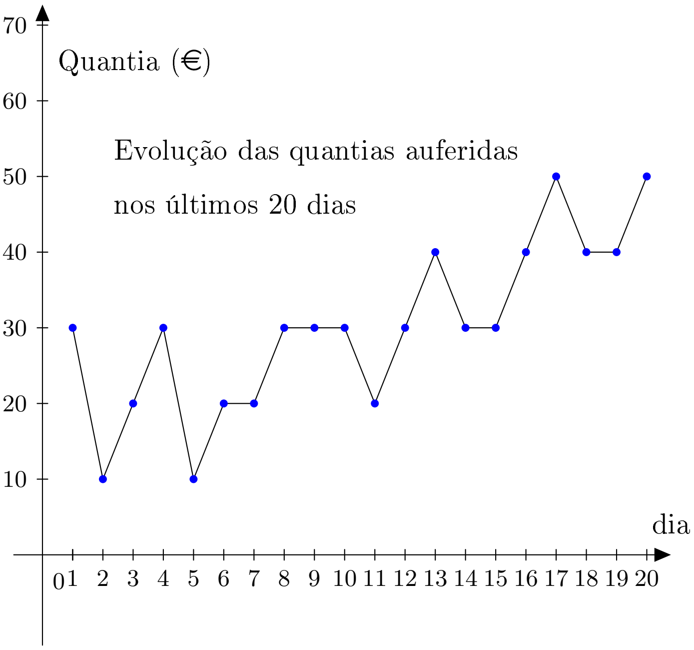


Figura 2.8: Gráfico de linha: Evolução das quantias auferidas

Este gráfico é elucidativo ao mostrar que o negócio evolui de forma positiva, com tendência para crescer.

2.3.5 Medidas de localização

Depois da redução e organização dos dados através das tabelas de frequência e dos diferentes tipos de gráficos surge outro processo de resumir a informação, utilizando determinadas medidas, calculadas a partir dos dados, que se chamam estatísticas. Das medidas que iremos definir para caracterizar os dados, destacam-se as medidas de localização e dentro destas as de tendência central. Uma medida de localização é um número ou categoria que nos dá informação sobre alguma tendência de localização da amostra, sendo que no caso de dados quantitativos traduz a ordem de grandeza dos dados da amostra. De entre as medidas de tendência central salientam-se a moda, a média e mediana.

2.3.5.1 Média

Definição 2.15. ***Média*** — *Dada uma amostra quantitativa, de dimensão n, constituída pelos valores $x_1, x_2, ..., x_n$, chama-se média amostral ou simplesmente média, e representa-se por $\bar{x}$, ao quociente entre a soma de todos os dados e a dimensão da amostra. Ou seja,*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Costa e Rodrigues, 2014).

Pode dizer-se que a média é o ponto de equilíbrio de todos os elementos da amostra, na medida em que equilibra os valores grandes com os pequenos (Martins e Ponte, 2010).

Exemplo 2.18. *O Carlos lançou 10 vezes um dado cúbico, com as faces pontuadas de um a seis, tendo obtido as seguintes pontuações:*

2 5 1 2 6 5 3 4 1 1

A média das pontuações obtidas é:

$$\bar{x} = \frac{2+5+1+2+6+5+3+4+1+1}{10} = 3.$$

Nas amostras de dados quantitativos discretos, em que muitas vezes os dados aparecem repetidos, para calcular a média em vez de se somarem separadamente todos os dados, podem agrupar-se os valores que se repetem (dados classificados), como se pode ver na tabela 2.14:

x_i	f_i	fr_i
x_1	f_1	fr_1
x_2	f_2	fr_2
...	...	...
x_k	f_k	fr_k
Total	n	1

Tabela 2.14: Tabela de frequências

Neste sentido, e de um modo geral, dada uma amostra de dimensão n em que x_i, variável quantitativa, toma k valores distintos, sendo f_i e fr_i, respetivamente, a frequência absoluta e a frequência relativa do valor x_i, tem-se:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + ... + x_k \times f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \times f_i}{n}$$

ou

$$\bar{x} = x_1 \times fr_1 + x_2 \times fr_2 + ... + x_k \times f_k = \sum_{i=1}^{k} x_i \times fr_i.$$

Exemplo 2.19. *Considera a distribuição dos prémios de produtividade (em euros) dados aos funcionários de uma empresa no mês de novembro.*

Prémio - x_i	Número de funcionários - f_i
50	1
80	6
110	3
140	2
Total	12

Tabela 2.15: Tabela: Nº de funcionários

Determina a média dos valores dos prémios atribuídos em novembro.

Resolução: *Seja $\bar{x}$ a média dos valores dos prémios atribuídos em novembro,*

$$\bar{x} = \frac{50 \times 1 + 80 \times 6 + 110 \times 3 + 140 \times 2}{12} = 95$$

A média dos prémios atribuídos foi de 95 euros.

Propriedades da média

Propriedade 1. — *Dada uma distribuição estatística quantitativa cuja média é $\bar{x}$, se adicionarmos uma constante k a todos os dados observados, obtém-se uma nova distribuição em que a média é igual a $\bar{x} + k$.*

Demonstração. Se

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... f_p x_p}{n},$$

onde x_i toma p valores distintos e sendo f_i a frequência absoluta do valor x_i, ao adicionar k a todos os valores tem-se:

$$\bar{y} = \frac{f_1(x_1 + k) + f_2(x_2 + k) + ... + f_p(x_p + k)}{n}$$

o que equivale a:

$$\bar{y} = \frac{f_1 x_1 + f_1 k + f_2 x_2 + f_2 k + ... + f_p x_p + f_p k}{n}$$

isto é,

$$\bar{y} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_p x_p}{n} + \frac{nk}{n}$$

então,

$$\bar{y} = \bar{x} + k.$$

□

Exemplo 2.20. *Numa turma de 10º ano a média dos resultados finais é de 12 valores. O professor decidiu aumentar dois valores a cada aluno. Então a média dos resultados finais passa a ser de 14 valores.*

Propriedade 2. — *Dada uma distribuição estatística cuja média é $\bar{x}$, se multiplicarmos uma constante k a todos os dados observados, obtém-se uma nova distribuição em que a média é igual a $\bar{x} \times k$.*

Demonstração. Se

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_px_p}{n}$$

ao multiplicarmos todos os valores por k, a nova média é:

$$\bar{y} = \frac{f_1kx_1 + f_2kx_2 + ... + f_pkx_p}{n}$$

o que equivale a:

$$\bar{y} = \frac{k(f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_px_p)}{n}$$

então,

$$\bar{y} = k\bar{x}.$$

□

Exemplo 2.21. *Numa empresa, no mês de novembro a média dos prémios atribuídos aos funcionários foi de 95 euros. Em dezembro, o valor do prémio atribuído a cada funcionário duplicou. Então, no mês de dezembro a média dos prémios atribuídos aos funcionários foi de 190 euros (o dobro do valor de novembro).*

Propriedade 3. — *Dados dois conjuntos de números, com n elementos cada, e de média $\bar{x}$ e $\bar{y}$ respetivamente, o conjunto obtido pela soma dos elementos dos conjuntos dados, um a um, é um conjunto de n elementos cuja média é a soma das média: $\bar{x} + \bar{y}$.*

Demonstração. Seja $\bar{x}$ a média de um conjunto de n elementos e $\bar{y}$ a média de um outro conjunto de n elementos. Consideremos um novo conjunto em que cada elemento é a soma dos elementos dos conjuntos dados, um a um. A média deste novo conjunto é:

$$\bar{z} = \frac{(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_n + y_n)}{n}$$

o que equivale a:

$$\bar{z} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$$

então,

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}.$$

□

Exemplo 2.22. *Uma dona de casa calculou a média do que gastou, mensalmente, em eletricidade num ano e deu 120 euros; também calculou a média do que gastou, mensalmente, em água no mesmo ano e deu 50 euros. Para calcular a média do que gastou, por mês, em água e eletricidade durante o ano, basta-lhe somar as duas média já calculadas. Ou seja, gasta mensalmente, em média, 170 euros em água e eletricidade.*

Segundo Murteira et al (2007), a média é uma medida de localização que, geralmente, indica um valor central da distribuição, entendido como o valor em torno da qual se distribuem os valores da coleção.

Da definição da média, obtemos assim a seguinte propriedade:

Propriedade 4. — *Dado um conjunto de dados, de n elementos, a soma dos desvios de cada um, relativamente à média, é igual a zero. Ou seja, se a todos os valores, subtrairmos a média, a soma das diferenças obtidas é igual a zero. Isto é*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

Demonstração. Dado o conjunto com n elementos e cuja a média é $\bar{x}$, então a soma dos desvios de cada um, relativamente à média é igual a:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + ... + (x_n - \bar{x}),$$

isto é:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n) - n\bar{x}.$$

Ou seja

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n) - n\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

o que equivale a:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n) - (x_1 + x_2 + ... + x_n) = 0.$$

□

Exemplo 2.23. *Na aula de Matemática o professor disse: - A média das idades dos meus quatro filhos é 4 anos. O mais novo tem 2 e o mais velho 8. Que idades podem ter os meus dois outros filhos?*

- um alunos respondeu: são gémeos e têm 3 anos. O aluno foi ao quadro e desenhou:

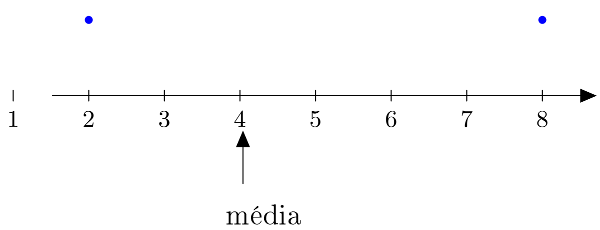


Figura 2.9: Representação nº 1 da média

O aluno explicou que a distância que vai do 8 ao 4 (média) é 4, e a distância do 2 ao 4 é 2, pelo que falta somar 2 unidades nas distâncias à esquerda da média, para que o total das distâncias superiores a 4 seja igual ao total das distâncias dos valores menores que 4. Então se considerar dois pontos no valor 3, fica tudo certo. Esquematizando:

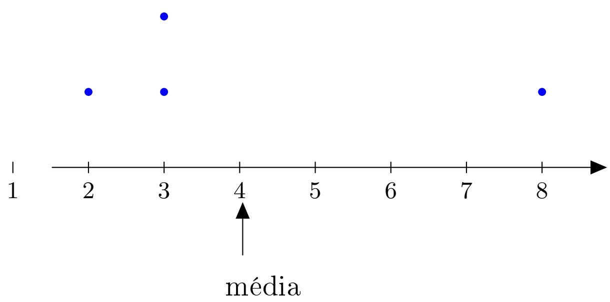


Figura 2.10: Representação nº 2 da média

Ou seja:(2-4)+ (3-4)+(3-4)+(8-4)=0.

Segundo Reis (2000) as **caraterísticas mais importantes da média são:**

1. A média é a medida mais familiar;

2. É uma medida influenciada por todos os valores. Qualquer alteração num desses valores produz uma modificação no valor da média;
3. O valor da média pode ser diferente de todos os valores observados;
4. O valor da média pode ser enviesado por apenas alguns valores extremos.

A mesma autora, Reis (2000), apresenta como **vantagens** para a média:

1. facilidade de interpretação e cálculo;
2. utilizar toda a informação disponível e poder ser calculada com precisão matemática.

e como **desvantagens**:

1. ser influenciada por valores extremos;
2. poder não corresponder a um valor concreto da variável.

2.3.5.2 Mediana

A mediana é também uma medida de localização do centro da distribuição dos dados, neste caso é um valor que divide a amostra ordenada ao meio.

Definição 2.16. ***Mediana*** *— A partir de um conjunto de dados ordenados dá-se o nome de* ***mediana*** *ao valor (pertencente ou não a esse conjunto de dados) que o divide ao meio, ou seja 50% dos elementos são não superiores à mediana e os outros 50% são não inferiores à mediana. A mediana representa-se por Me ou $\tilde{x}$ (Costa e Rodrigues, 2014).*

Para determinar a mediana é fundamental ordenar os dados. Em relação à dimensão da amostra podem-se verificar duas situações:

- se a dimensão da amostra é ímpar há um elemento da amostra ordenada que tem tantos elementos à sua esquerda como à sua direita. Esse elemento que ocupa a posição central é a mediana;
- se a dimensão da amostra é par há dois elementos da amostra que ocupam a posição central. Nesta situação a mediana é a média aritmética desses dois valores.

Assim tendo em conta a dimensão da amostra podemos definir mediana do seguinte modo:

Definição 2.17. ***A Mediana*** *— de um conjunto de n dados quantitativos $x_1, x_2, ..., x_n$ ordenados (por ordem crescente ou decrescente) é o valor da variável que é dado por:*

- x_k *se* ***n ímpar****, sendo* $k = \frac{n+1}{2}$;
- $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ *se* ***n par****, sendo* $k = \frac{n}{2}$

(Costa e Rodrigues, 2014).

Exemplo 2.24. *A distribuição das classificações, na escala de 0 a 20, na disciplina de Matemática, obtida pelos rapazes de uma turma é a seguinte:*

{12, 8, 13, 14, 10, 18, 11, 11, 9, 12, 15}

Determina a mediana do conjunto das classificações dos rapazes.

Resolução:

Há 11 (número ímpar) classificações correspondentes aos rapazes. Para determinar a mediana das classificações deve-se:

1. *ordenar os dados: {8, 9, 10, 11, 11, <u>12</u>, 12, 13, 14, 15, 18};*
2. *encontrar o dado que ocupa a posição central:* $x_{\frac{11+1}{2}} = x_6$ *ou seja é o 12.*

A mediana é: $\tilde{x} = x_6 = 12$.

Exemplo 2.25. *A distribuição das classificações, na escala de 0 a 20, na disciplina de Matemática, obtida pelas raparigas de uma turma é a seguinte:*

{14, 9, 10, 10, 15, 13, 12, 8}

Determina a mediana do conjunto das classificações das raparigas.

Resolução:

Há 8 (número par) classificações correspondentes às raparigas. Para determinar a mediana das classificações deve-se:

1. *ordenar os dados: {8, 9, 10, <u>10</u>,<u>12</u>, 13, 14, 15};*
2. *encontrar os dados que ocupam a posição central:* $x_{\frac{8}{2}} = x_4$ *e* $x_{\frac{8}{2}+1} = x_5$ *ou seja, 10 e 12.*

A mediana é a média dos dados que ocupam a posição central: $\tilde{x} = \frac{10+12}{2} = \frac{22}{2} = 11$.

De acordo com Reis (2000) as **caraterísticas mais importantes da mediana** são:

1. A mediana é fácil de calcular e de compreender;

2. É determinada apenas pelas observações centrais pelo que os valores extremos não afetam o seu valor;

3. É uma medida muito utilizada sobretudo para distribuições fortemente assimétricas por não ser afetada por valores extremos.

Salientam-se as **vantagens** para a mediana:

1. fácil de interpretar e calcular;

2. a mediana não é influenciada por valores extremos.

e como **desvantagens**:

1. não tem em conta todas as observações, apenas 1 ou 2 valores da amostra;

2. não se presta ao cálculo algébrico.

Comparando a mediana com a média e segundo Murteira et al (2007), conclui-se que enquanto no cálculo da média basta alterar uma observação para que a média varie, a mediana ocupa a posição central dos dados, por este motivo está muito menos sujeita a valores extremos, por isso é uma medida muito mais resistente que a média.

Resumindo, Martins (2005) entende como a média é influenciada quer por valores muito grandes, quer por valores muito pequenos, e se a distribuição dos dados for enviesada para a direita (alguns valores grandes como *outliers*), a média tende a ser maior que a mediana; se for aproximadamente simétrica, a média aproxima-se da mediana e se for enviesada para a esquerda (alguns valores pequenos como *outliers*), a média tende a ser inferior à mediana. Representando as distribuições dos dados na forma de uma mancha, temos, de um modo geral:

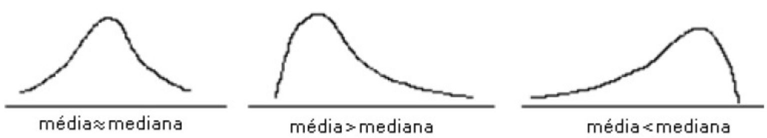


Figura 2.11: Comparação: Média e Mediana. Fonte: (Martins e Ponte, 2010)

2.3.5.3 Moda

No que se refere à moda, não faz sentido falar no seu cálculo, mas sim na procura do valor da variável, quantitativa ou qualitativa, que ocorre mais vezes, isto é, que tem maior frequência absoluta. A esse valor dá-se o nome de moda.

Definição 2.18. ***Moda*** — *Sendo $x_1, x_2, ..., x_k$, os valores distintos de uma variável estatística, chama-se moda ao valor (ou valores) que tem maior frequência absoluta e representa-se por M_o (Costa e Rodrigues, 2014).*

Exemplo 2.26. *Perguntou-se qual era o número de irmãos a nove alunos e obtiveram-se os seguintes resultados:*

$$\{2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 3\ \}$$

Indica a moda.

R: a moda é 0, porque é o valor mais frequente.

Para um conjunto de dados, pode existir mais do que uma ou até nem existir nenhuma moda. Assim a distribuição pode ser:

- **amodal** — se o conjunto de dados não possuir moda;
- **unimodal** — se o conjunto de dados possuir uma moda;
- **bimodal** — se o conjunto de dados possuir duas modas;
- **plurimodal ou multimodal** — se o conjunto de dados possuir mais de duas modas.

Martins (2005) considera que "esta medida (moda) é especialmente útil para reduzir a informação de conjuntos de dados qualitativos, portanto apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e por vezes a mediana (se não forem suscetíveis de ordenação)."

A moda é uma medida com uma aplicação relativamente restrita. Martins e Ponte (2010) defendem que "esta medida tem algum interesse quando dispomos de uma amostra de grande dimensão, mas com um número restrito de valores distintos".

Exemplo 2.27. *de uma boa aplicação da moda: O dono de uma sapataria tem interesse em saber qual o tamanho mais vendido, pois será nesse tamanho que vai investir mais, no princípio de cada época.*

Para Reis (2000) **as caraterísticas mais importantes** da moda são:

1. em geral ser menos utilizada que a média e a mediana;
2. ser a única medida de localização para dados qualitativos;
3. poder ser determinada quer para as variáveis qualitativas quer para as variáveis quantitativas;
4. o valor da moda não sofrer a influência de valores extremos (*outliers*).

De uma forma resumida, esta medida apresenta as seguintes **vantagens**:

- é fácil de calcular e de interpretar;
- depende apenas das observações mais frequentes;
- em geral, não é influenciada por valores extremos;
- o estudo da moda, pode pôr em evidência a heterogeneidade dos grupos.

e como **desvantagem**:

- não se presta ao cálculo algébrico.

Em relação à escolha de uma destas três medidas mencionadas e na opinião de Reis (2000) "não existe uma regra para determinar qual a medida de tendência central mais apropriada para descrever uma determinada distribuição. Se esta for perfeitamente simétrica, o problema não se coloca pois a média, a moda e a mediana são iguais. Quando a distribuição é assimétrica, a escolha da medida mais adequada deverá ser feita depois de uma análise das caraterísticas de cada uma das medidas e do tipo de dados disponíveis."

Comparação da Média, da Mediana e da Moda

Nas distribuições simétricas coincidem a média, a mediana e a moda (caso exista). Segundo Murteira e Black (1983) "nas distribuições assimétricas, a moda, a mediana e a média situam-se por esta ordem para o lado mais longo. Assim, a média desloca-se para esse lado à mediada que o enviesamento se acentua, porque para lá se desloca também o centro de gravidade. A mediana, como divide a área em duas iguais, para compensar a área do lado abrupto, afasta-se também da moda, mas menos de que a média."O diagrama de pontos exemplifica esta situação pois mostra como a transformação de uma distribuição simétrica em assimétrica faz afastar a média e a mediana da moda:

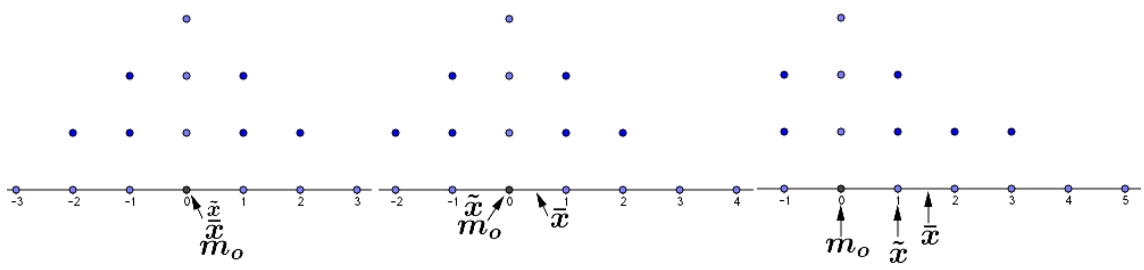


Figura 2.12: Posição relativa da média, da moda e da mediana

Em resumo, tem-se:

- distribuições simétricas:
$$\bar{x} = \tilde{x} = M_o;$$

- distribuições enviesadas à esquerda ou assimétricas positivas:
$$\bar{x} > \tilde{x} > M_o;$$

- distribuições enviesadas à direita ou assimétricas negativas:
$$\bar{x} < \tilde{x} < M_o.$$

A este respeito Murteira e Black (1983) dizem que " Pearson obteve uma relação aproximada muito interessante que se verifica entre as três medidas de localização consideradas e indica em que medida elas se afastam umas das outras quando existe assimetria moderada. A fórmula

$$\bar{x} - M_o \approx 3(\bar{x} - \tilde{x}),$$

pode ainda usar-se para calcular a moda da distribuição, conhecidas a média e a mediana. No entanto, é mais aconselhável usá-la para conferir, por alto, os valores previamente determinados."

2.3.5.4 Quartis

A média e a mediana são duas medidas que nos permitem localizar o centro da distribuição dos dados. Em muitos casos de estudos estatísticos em que a população ou a amostra é de grande dimensão, há interesse em conhecer a maior ou menor concentração de dados ao longo do intervalo de variação dos seus valores, isto é, entre o valor mínimo e o valor máximo. Existem outras medidas,por exemplo os quartis, que localizam outros pontos da distribuição dos dados e que têm a mais valia de servirem para definir uma medida de variabilidade existente entre os dados. Os quartis são considerados, também, medidas de localização.

Definição 2.19. ***Quartis*** — *Os Quartis são os valores da variável que dividem a distribuição de frequências em quatro partes, cada uma delas contendo 25% dos dados (Costa e Rodrigues, 2014).*

Sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ os n valores ordenados por ordem crescente de uma variável quantitativa, representa-se por $Q_1, Q_2 \quad e \quad Q_3$ o primeiro, segundo e terceiro quartis, respetivamente, e tem-se:

- Q_1 é o valor que divide o conjunto de dados em duas partes, de tal modo que, pelo menos, $\frac{1}{4}$ ou 25% das observações sejam inferiores ou iguais a esse valor e $\frac{3}{4}$ ou 75% das observações sejam superiores ou iguais a esse valor;

- Q_2 coincide com a mediana;

- Q_3 é o valor que divide o conjunto de dados em duas partes, de tal modo que, pelo menos, $\frac{3}{4}$ ou 75% das observações sejam inferiores ou iguais a esse valor e $\frac{1}{4}$ ou 25% das observações sejam superiores ou iguais a esse valor.

Para determinar os quartis existem vários processos, nem todos conducentes aos mesmos valores, mas a valores próximos, desde que a amostra tenha uma dimensão razoável.

No caderno de apoio às Metas Curriculares para o 3º ciclo e no que concerne ao conteúdo quartis é referido que "analisando a literatura especializada, verifica-se a existência de uma grande diversidade de processos que não conduzem aos mesmos resultados para o primeiro e para o terceiro quartil (o segundo quartil, invariavelmente, é definido como sendo igual à mediana). Em suma, não existe uma definição universalmente aceite nem para o primeiro nem para o terceiro quartil" (Bivar et al, 2013).

Neste caderno são apresentados, também, três métodos diferentes para determinar os quartis. A título de exemplo apresenta-se o cálculo do primeiro quartil, (Q_1):

Tomando um conjunto com dados $(x_1, x_2, ..., x_{23})$

1. Divide-se o número de dados por quatro. Uma vez que $\frac{23}{4}$ não é inteiro, consideram-se os números inteiros imediatamente inferior e superior (5 e 6) e os dados correspondentes a essas ordens na sequência ordenada dos dados, tomando-se para primeiro quartil a média aritmética desses dois dados. Neste caso, tem-se $Q_1 = \frac{x_5+x_6}{2}$.

2. Depois de ordenados os dados e de encontrada a mediana (x_{12}), o primeiro quartil (Q_1) é obtido como a mediana dos dados de ordem inferior à ordem da mediana ($x_1 \quad a \quad x_{11}$). Assim, tem-se $Q_1 = x_6$. É este o processo utilizado por grande parte das calculadoras.

3. Depois de ordenados os dados e de encontrada a mediana (x_{12}), o primeiro quartil (Q_1) é obtido como a mediana dos dados de ordem inferior ou igual à ordem da mediana ($x_1 \quad a \quad x_{12}$), obtendo-se o valor $Q_1 = \frac{x_6+x_7}{2}$.

Generalizando para um conjunto com n dados cada um dos três processos em análise, convém distinguir os casos correspondentes aos diferentes restos resultantes da divisão de n por 4 . Repare-se ainda que quando n é ímpar existe um dado cujo valor é igual à mediana ao passo que, quando n é par, a mediana pode não coincidir com o valor de nenhum dos dados já que é calculada como média dos valores de dois dados. Nos casos em que é n par, tanto o 2.º como o 3.º processo fazem intervir no cálculo de Q_1 os valores das ordens até à ordem $\frac{n}{2}$(inclusive).

Considerem-se então os quatro casos: $n = 4k; n = 4k+1; n = 4k+2; n = 4k+3$.

Na tabela 2.16, apresenta-se o valor de Q_1, calculado pelo método apresentado em cada um dos três processos:

	$n = 4k$	$n = 4k+1$	$n = 4k+2$	$n = 4k+3$
1º processo	$Q_1 = x_k$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
2º processo	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$
2º processo	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = x_{k+1}$	$Q_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

Tabela 2.16: Tabela: Quartis. Fonte: (Bivar et al, 2013)

De acordo com o Caderno de Apoio às Metas Curriculares para o 3º ciclo sugere-se, para o cálculo dos quartis, a aplicação do 2.º processo: não incluir a mediana para o cálculo dos quartis uma vez que é o mais amplamente utilizado, sendo em particular o que está programado na grande maioria das calculadoras.

Exemplo 2.28. *Considera o seguinte conjunto de dados numéricos:*

$$\{23,\ 13,\ 14,\ 25,\ 26,\ 14,\ 12,\ 20,\ 15,\ 13,\ 23,\ 26,\ 26,\ 12,\ 17\}$$

Indica os valores do primeiro e do terceiro quartil.

Resolução:

Dados ordenados: 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 23, 23, 25, 26, 26, 26.

Como são 15 dados e 15 é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem $\frac{15+1}{2} = 8$.

$$12,\ 12,\ 13,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ \underbrace{17}_{\tilde{x}},\ 20,\ 23,\ 23,\ 25,\ 26,\ 26,\ 26$$

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor que 8:

$$12,\ 12,\ 13,\ \underbrace{13}_{Q_1},\ 14,\ 14,\ 15.$$

O primeiro quartil é 13.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem maior que 8:

$$20,\ 23,\ 23,\ \underbrace{25}_{Q_3},\ 26,\ 26,\ 26$$

O terceiro quartil é 25.

Exemplo 2.29. *Indica o primeiro e o terceiro quartil do seguinte conjunto de dados:*

$$\{8,\ 14,\ 14,\ 10,\ 7,\ 2,\ 10,\ 6,\ 7,\ 13,\ 16,\ 16,\ 4,\ 7,\ 15,\ 11,\ 3\}$$

Resolução:

Dados ordenados: 2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 16.

Como o n.º de dados é ímpar, a ordem de referência para o cálculo dos quartis é a ordem $\frac{17+1}{2} = 9$.

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ \underbrace{10}_{\tilde{x}},\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 14,\ 15,\ 16,\ 16$$

Para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem inferior à ordem assinalada:

$$2,\ 3,\ 4,\ \underbrace{6, 7}_{Q_1=\frac{6+7}{2}=6{,}5},\ 7,\ 7,\ 8$$

O primeiro quartil é 6,5.

Para calcular o terceiro quartil temos que determinar a mediana dos dados a partir da ordem assinalada, correspondente à mediana:

$$10,\ 11,\ 13,\ \underbrace{14, 14}_{Q_3=\frac{14+14}{2}=14},\ 15,\ 16,\ 16$$

O terceiro quartil é 14.

Exemplo 2.30. *Indica o primeiro e o terceiro quartil do seguinte conjunto de dados:*

$$\{3,\ 4,\ 15,\ 16,\ 4,\ 2,\ 10,\ 5,\ 4,\ 13,\ 16,\ 16,\ 2,\ 7,\ 5,\ 2\}$$

Resolução:

Sequência ordenada dos dados: $2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ \underbrace{5, 5}_{\tilde{x}=\frac{5+5}{2}=5},\ 7,\ 10,\ 13,\ 15,\ 16,\ 16,\ 16.$

Uma vez que este conjunto tem 16 dados (n.º par), para calcular o primeiro quartil temos que determinar a mediana dos dados de ordem menor ou igual a 8 ($\frac{16}{2}$*):*

$$2,\ 2,\ 2,\ \underbrace{3, 4}_{Q_1=\frac{3+4}{2}=3{,}5},\ 4,\ 4,\ 5$$

O primeiro quartil é 3,5.

Para o terceiro quartil, temos:

$$5,\ 7,\ 10,\ \underbrace{13, 15}_{Q_3=\frac{13+15}{2}=14},\ 16,\ 16,\ 16$$

O terceiro quartil é 14.

2.3.6 Medidas de dispersão

As medidas de localização mencionadas anteriormente por vezes não são suficientes, por si só, para caraterizar de forma adequada uma distribuição, por essa razão devem-se determinar outras medidas que deem uma indicação da dispersão dos valores da variável. De acordo com Reis (2000) "as medidas de dispersão servem para verificar a representatividade das medidas de localização". Segundo a mesma autora "as medidas de dispersão podem ser divididas em duas categorias. Uma primeira inclui as medidas de distância, cujos valores se apresentam na mesma unidade de medida dos dados originais e não recorrem ao cálculo prévio de uma medida de localização. São exemplos a amplitude de dados e a amplitude interquartil. A segunda categoria utiliza uma medida de localização como termo de comparação e pode ou não estar representada na mesma unidade dos dados originais. São exemplos a variância, o desvio padrão e o desvio médio". De acordo com o Programa e as Metas Curriculares, neste trabalho apenas se faz referência à amplitude de dados e à amplitude interquartil.

Reis (2000) refere que existem duas razões importantes que justificam o cálculo de uma medida de dispersão. A primeira consiste na necessidade de se obter um instrumento que nos permita avaliar a representatividade do seu valor médio num conjunto de dados. Se existir uma grande variação dos valores observados, uma medida de tendência central, por si só, dá pouca informação. A outra razão prende-se com a necessidade de conhecer a dispersão dos valores com o objetivo de serem tomadas medidas concretas para os controlar.

2.3.6.1 Amplitude

Definição 2.20. ***Amplitude Total ou Amplitude*** — *de um conjunto de dados quantitativos é a diferença entre o máximo e o mínimo dos dados.*

$$Amplitude = Máximo - Mínimo$$

(Martins e Ponte, 2010).

Martins e Ponte (2010) aludem que "esta medida embora muito fácil de calcular pode por vezes ser enganadora. É baseada em dois únicos dados, que podem ser atípicos na distribuição de todos os dados do conjunto."

A amplitude é uma medida de dispersão muito sensível aos valores extremos, mas não nos dá qualquer informação relativa a outros valores. Por outro lado é uma medida muito simples de calcular e que nos dá uma ordem de grandeza da variabilidade total.

Exemplo 2.31. *Num concurso televisivo, dois grupos, A e B, participaram em oito provas, sendo 100 a pontuação máxima em cada prova.*

As pontuações de cada grupo nas oito provas foram as seguintes:

Prova	Grupo A	Grupo B
1	46	10
2	48	18
3	49	30
4	50	50
5	50	50
6	51	70
7	52	82
8	54	90

Tabela 2.17: Tabela: Pontuação

Se calcularmos as medidas: média, moda e mediana quer para o grupo A quer para o grupo B, verificamos que têm o mesmo valor ou seja 50. No entanto o desempenho de cada grupo foi diferente. Por observação dos conjuntos de dados, conclui-se que os resultados do grupo A são mais homogéneos do que os do grupo B. Para confirmar, calcula-se a amplitude de dados.

No grupo A as pontuações extremas foram a mínima 46 e a máxima 54. A ***amplitude*** *dos resultados foi igual a 8 (54-46).*

No grupo B as pontuações extremas foram a mínima 10 e a máxima 90. A ***amplitude*** *dos resultados, neste caso, foi igual a 80 (90-10).*

A comparação das amplitudes permite concluir que os resultados extremos estão mais afastados no grupo B do que no grupo A.

Em relação à amplitude de dados pode-se mencionar as seguintes **vantagens/desvantagens**:

- é uma medida fácil de calcular;

- é insensível a qualquer alteração dos valores intermédios;
- não tem em conta todas as observações;
- a presença de "*outliers*" afeta significativamente a amplitude total.

2.3.6.2 Amplitude interquartil

Uma outra medida de variabilidade, alternativa à amplitude, é a amplitude interquartil. Esta medida só entra em linha de conta com a parte central dos dados e calcula-se fazendo a diferença entre o 3º e o 1º quartil. Ela traduz a amplitude do intervalo que contém os 50 % dos dados mais centrais. Assim sendo deixa de ser sensível a valores extremos.

Definição 2.21. ***Amplitude interquartil*** *— de um conjunto de dados quantitativos é a diferença entre o 3º quartil (Q_3) e o 1º quartil (Q_1) dos dados.*

$$Amplitude \quad interquartil = Q_3 - Q_1$$

(Martins e Ponte, 2010).

Exemplo 2.32. *Calcula a amplitude interquartil do seguinte conjunto de dados:*

{120, 135, 128, 140, 115, 127, 150, 144, 131, 126, 132, 129, 142}

***Resolução**:*
Ordenar os dados e determinar a mediana:

$$115,\ 120,\ 126,\ 127,\ 128,\ 129,\ \underbrace{131}_{\tilde{x}=131},\ 132,\ 135,\ 140,\ 142,\ 144,\ 150$$

Determinar Q_1:

$$115,\ 120,\ \underbrace{126, 127}_{Q_1=\frac{126+127}{2}=126{,}5},\ 128,\ 129$$

Determinar Q_3:

$$132,\ 135,\ \underbrace{140, 142}_{Q_3=\frac{140+142}{2}=141},\ 144,\ 150$$

Amplitude interquartil$= Q_3 - Q_1 = 141 - 126,5 = 14,5.$

Do modo como se define a amplitude inter-quartil, conclui-se que 50% dos elementos do meio da amostra estão contidos num intervalo com aquela amplitude.

Na opinião de Martins et al (1997) esta medida será tanto maior quanto maior for a variabilidade nos dados. Uma amplitude interquartil nula, não significa necessariamente, que os dados não apresentem variabilidade.

Propriedades da amplitude interquartil

- a amplitude será tanto maior, quanto maior for a variabilidade presente nos dados;
- se não houver variabilidade, ou seja, se os dados forem todos iguais, então a amplitude interquartil é igual a zero;
- se a amplitude interquartil de um conjunto de dados for nula, não significa que não haja variabilidade;
- a amplitude interquartil é uma medida utilizada frequentemente, sobretudo se os dados apresentarem alguns "*outliers*".

No que se refere à amplitude interquartil pode-se mencionar como **Vantagens/Desvantagens:**

- é insensível às alterações dos dados por valores extremos;
- é possível associar a representação gráfica "diagrama de extremos e quartis".

Diagrama de extremos e quartis

Uma maneira de evidenciar o modo como os dados se distribuem é através de uma representação gráfica, designada por diagrama de extremos e quartis, que envolve apenas cinco valores retirados ou calculados a partir da amostra. Esses valores são: o mínimo, o máximo, a mediana, o 1.º quartil e o 3.º quartil.

O diagrama de extremos e quartis constrói-se da seguinte forma:

- desenha-se um retângulo (caixa) cujo comprimento é igual à amplitude entre os dois quartis, calculados a partir dos dados, e por largura um valor qualquer;
- do meio dos lados do retângulo saem dois segmentos de reta que unem esses lados respetivamente com o mínimo e o máximo do conjunto de dados;
- no interior do retângulo desenha-se um traço que assinala a posição da mediana.

A representação do diagrama de extremos e quartis tem o aspeto dado na figura 2.13:

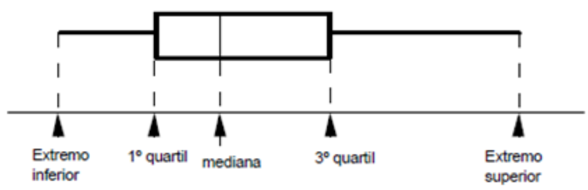


Figura 2.13: Esboço nº 1 do diagrama de extremos e quartis. Fonte: (Martins et al, 1997)

A partir da observação do esquema da figura 2.14 podem-se tirar algumas conclusões:

- 25% do total dos dados são menores ou iguais a Q_1;
- 25% do total dos dados são maiores ou iguais a Q_1 e menores ou iguais a $\tilde{x}$;
- 25% do total dos dados são maiores ou iguais a Q_3;
- 50% do total dos dados são maiores ou iguais a Q_1 e menores ou iguais a Q_3.

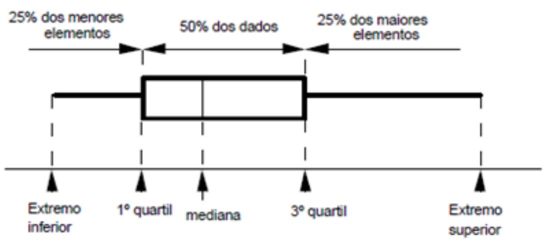


Figura 2.14: Esboço nº 2 do diagrama de extremos e quartis. Fonte: (Martins et al, 1997)

Os diagramas de extremos e quartis fornecem informações importantes sobre os dados e as suas caraterísticas, nomeadamente sobre o centro da amostra (mediana), variabilidade (dispersão) e simetria (Martins e Ponte, 2010). Estas caraterísticas podem ser observadas no gráfico através:

- da distância entre a linha indicadora da mediana e os lados do retângulo;
- do comprimento da caixa;
- do comprimento das linhas que saem dos lados dos retângulos.

Apresentam-se a seguir dois exemplos de diagramas de extremos e quartis:

Exemplo 2.33. *Um professor corrigiu 26 testes, classificando-os de 1 a 10. Os resultados obtidos apresentam-se na tabela 2.18:*

Classificação	Nº de alunos
1	2
2	4
3	3
4	1
5	6
6	5
7	2
8	0
9	2
10	1

Tabela 2.18: Tabela: Classificação dos alunos

- *Constrói um diagrama de extremos e quartis das classificações dos testes.*

Resolução:

Para construir o diagrama precisa-se de determinar:

- *Mínimo = 1;*
- $Q_1 = 3$*;*
- $\tilde{x} = 5$*;*
- $Q_3 = 6$*;*
- *Máximo= 10.*

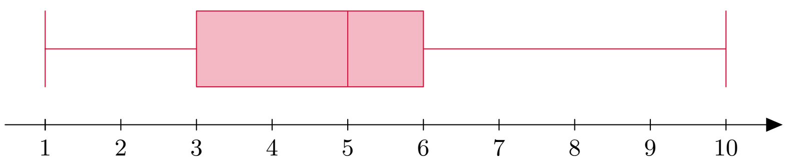


Figura 2.15: Diagrama de extremos e quartis: Classificação dos alunos

Por observação do gráfico do diagrama de extremos e quartis pode concluir-se, por exemplo, que:

- *há uma maior concentração de dados entre a mediana e o 3º quartil;*

- *há uma maior dispersão entre o 3º quartil e o valor máximo.*

Exemplo 2.34. *Observa o gráfico 2.16 representado abaixo, relativo às faltas dos alunos de uma turma do 8.º ano durante o mês de setembro (Bivar et al, 2013).*

Figura 2.16: Gráfico de barras: Faltas do mês de setembro

- *Constrói um diagrama de extremos e quartis.*

Resolução:

Para construir o diagrama precisa-se de determinar:

- *Mínimo= 1;*

- $Q_1 = 1$;

- $\tilde{x} = 2$;

- $Q_3 = 3$;

- *Máximo= 9.*

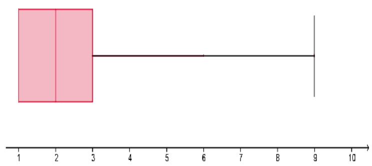


Figura 2.17: Diagrama de extremos e quartis: Nº de faltas

Neste diagrama os dados estão mais concentrados junto ao valor mínimo, diz-se que é uma distribuição enviesada à direita. E há uma grande dispersão de dados entre o 3º quartil e o valor máximo. 75% dos alunos têm no máximo 3 faltas.

Como já foi mencionado anteriormente o diagrama de extremos e quartis é um gráfico que permite representar em simultâneo medidas de localização e dispersão de uma amostra, que transmite de modo imediato uma ideia da localização e dispersão, mas é um instrumento adequado para comparar várias amostras. Martins e Ponte (2010) afirmam que "os diagramas de extremos e quartis são particularmente úteis para comparar a distribuição de vários conjuntos, realçando aspetos particulares como:

- comparação das medianas;
- comparação da dispersão entre os dados, utilizando a amplitude interquartil;
- identificação de possíveis *"outliers"*."

Exemplo 2.35. *Na figura 2.18 estão representados os diagramas de extremos e quartis que ilustram os resultados obtidos no 1º teste e no teste global, dos alunos de uma turma, na disciplina de Matemática.*

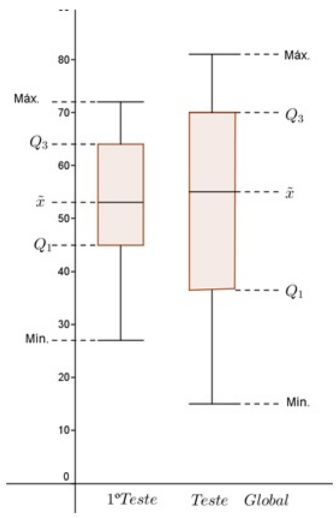


Figura 2.18: Comparação de diagramas de extremos e quartis

A representação torna evidente que no teste global houve uma maior variação das classificações. Apesar dos valores das medianas serem muito próximos, no 1º teste houve uma maior concentração dos dados.

Na opinião de Martins e Ponte (2010) "quando se faz a representação de dados, perde-se sempre alguma informação que eles contêm, mas em contrapartida obtemos informação sobre a estrutura da população de onde eles provêm". Das representações gráficas estudadas ao longo deste trabalho, aquela em que se perdeu mais informação foi o diagrama de extremos e quartis, no entanto foi a mais simples de ser construída. A representação em que se perde menos informação é o caule-e-folhas.

2.4 A importância das TIC no ensino da Organização e Tratamento de Dados

A utilização das tecnologias pode constituir um aspeto importante a considerar no ensino da Estatística uma vez que esta se revela vantajosa, quer a nível da motivação dos alunos para a compreensão dos problemas, facilitando assim a compreensão dos processos de resolução que lhes são necessários, quer para desenvolver o seu sentido crítico face aos resultados obtidos. Esta perspetiva está claramente consignada nas NCTM (2008), quando se afirma que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos."

Na mesma ordem de ideias, Cobb e Moore (1997) partilham da mesma reflexão ao defender que a tecnologia também contribui de forma positiva para a compreensão e aplicação dos procedimentos que estão relacionados com o tratamento e análise de dados, ajudando na compreensão de conceitos mais abstratos, na descoberta de padrões e desvios nos dados.

Assim, torna-se fundamental o recurso às novas tecnologias tendo em vista a promoção das aprendizagens, permitindo que os alunos se possam tornar aprendizes responsáveis, com capacidade de selecionar e organizar de forma objetiva, conteúdos e atividades de ensino, adequadas aos seus próprios propósitos de desenvolvimento individual, de acordo com ritmo apropriado de aprendizagem, promovendo, desta forma, a sua autonomia e sociabilização. Nunes (2008) refere que "através da tecnologia, a capacidade de raciocínio ganhará uma grande importância, pois os alunos terão a necessidade de interpretar racionalmente os resultados obtidos através da calculadora, do computador e dos seus *softwares*. Além das vantagens enumeradas também se revela importante devido à rapidez de cálculo e às possibilidades que daí advêm. Encurtado o tempo de cálculo de uma determinada medida é possível ao aluno realizar mais tarefas e mais diversificadas."

Com efeito, uma das missões da escola é ajudar os alunos no acesso à cultura, à ciência e à tecnologia, pois, nas sociedades atuais, estas irão ser imprescindíveis para os mesmos em termos funcionais na sua vida social e profissional. Neste sentido Biehler (1989) afirma que, no âmbito da Estatística, "os alunos realizam uma aprendizagem mais ativa, pois têm ao seu alcance a possibilidade de analisar dados, de forma numérica e gráfica, podendo experimentar, constatar e testar hipóteses que conjeturaram, comparando os resultados observados com os esperados, escrevendo, posteriormente sobre eles e sobre os procedimentos que testaram, ou apresentando-os à turma com recursos multimédia. A utilização de dados reais torna-se mais acessível, utilizando bases de dados disponíveis na Internet, assim como comparar diferentes representações dos dados. Estas novas experiências abrem horizontes quando comparadas com as aulas tradicionais de Estatística, pois o aluno lidera o processo de tratamento e organização de dados.”

Os princípios orientadores para o aumento dos conhecimentos do aluno resultam da identificação do assunto à matéria de ensino, proveniente de diversos conteúdos, estruturados em experiências de aprendizagem e nos processos de os tratar e aprender, para os quais as tecnologias de informação e comunicação “possibilitam o tratamento de dados reais, em vez do tradicional trabalho com amostras de pequena dimensão onde os valores são escolhidos de modo artificial para proporcionarem cálculos simples. Mais recentemente, a Internet, onde é possível obter uma imensa variedade de dados estatísticos, surgiu como um recurso de grande alcance para o ensino-aprendizagem deste tema” (Branco, 2000).

Neste âmbito pode depreender-se que a inclusão das novas tecnologias na escola e, em particular, no ensino da Matemática é um grande desafio que se coloca nos contextos educativos atuais, podendo as mesmas potencializar e rentabilizar o processo de aprendizagem de todos conteúdos.

Por tudo o que foi mencionado anteriormente nesta dissertação promove-se a compreensão e a pertinência da utilização das TIC no domínio da OTD, através da conceção de recursos digitais para utilização em plataformas *online*.

Capítulo 3

Implementação do *Software*

Neste capítulo começa-se por fazer referência ao MEGUA - pacote de *software*, *"open source"*, o qual possibilita a criação de arquivos de exercícios, escritos na linguagem tipográfica LaTeX, usando a linguagem de programação *Python*, que permite, também, o acesso às bibliotecas do *Sage Mathematics*. De seguida apresentam-se os aspetos relevantes de como criar um exercício parametrizado e quais os passos a seguir. Posteriormente apresenta-se uma concretização para cada um dos exercícios parametrizados criados referentes ao domínio OTD. Por último faz-se referência à plataforma SIACUA.

3.1 *Sage Mathematics*

No âmbito do desenvolvimento de aplicações para a Matemática pode recorrer-se a diferentes *softwares* com interesse específico para o ensino e aprendizagem das diversas áreas temáticas que a compõe.

Assim, existem disponíveis uma panóplia de *softwares* que se podem utilizar para efeitos de produção de recursos como seja para a geometria, a álgebra, funções, matemática recreativa, entre muitos outros. De facto existe uma grande disponibilidade de *softwares* matemáticos para utilização *online*, o que torna fundamental verificar se um determinado *software* serve, ou não, para desenvolver determinado conteúdo e se está indicado para ser utilizado em ambientes e contextos educativos.

Para efeito desta dissertação, e dado reunir as condições exigidas, necessárias e fundamentais para o desenvolvimento do trabalho de aplicação que se pretende executar utilizou-se a plataforma *Sage Mathematics*.

De acordo com Cruz et al (2011) "o objectivo é disponibilizar em rede, quer para professores quer para alunos, um vasto conjunto de exercícios que permita aos alunos aferir os seus conhecimentos e aos professores dê liberdade para investir noutro tipo de problemas e numa preparação de aulas mais eficiente, nomeadamente na criação de mais exercícios ou problemas, textos de apoio e outros meios que implementem o sucesso da aprendizagem".

Uma vez que a plataforma *Sage Mathematics*, segundo Stein et al (2012) "é um *software* para matemática que abrange computação algébrica, numérica e tem capacidades gráficas", significa que permite a utilização de um sistema de computação para matemática com potencial de suporte para os exercícios propostos no âmbito desta dissertação a serem disponibilizados aos alunos.

3.2 MEGUA

Atualmente existem diversos pacotes de *software* com funcionalidades específicas para determinadas áreas, como a informática, a contabilidade, fiscalidade, engenharias, saúde, entre muitas outras. Neste âmbito, e dado que um pacote de *software* também pode ser considerado como um conjunto de classes e interfaces relacionadas, na área da Matemática, também existe uma multiplicidade de pacotes que permitem a construção de exercícios e apresentação da respetiva resolução.

Nesta dissertação a opção recaiu sobre o *software* designado por MEGUA, que para além de ser um pacote *open source*, permite gerar automaticamente exercícios completos na linguagem tipográfica LaTeX, com apresentação dos respetivos resultados, possibilitando, desta forma, a conceção de um sistema de ensino assistido por computador, recorrendo à linguagem de programação *Python*.

Assim e segundo Cruz et al (2011) "MEGUA é um gerador de exercícios parametrizados, e respetivas resoluções, criados por professores, usando a experiência adquirida ao longo dos anos de lecionação ... cada elemento da base de dados do MEGUA é considerado como objeto de aprendizagem, que pode ser reutilizado em diversos contextos, sejam apenas como meras folhas de exercícios, jogos, testes, fichas de autodiagnóstico, etc."

Nesta dissertação os recursos digitais construídos foram desenvolvidos, especialmente, com as denominadas perguntas de escolha múltipla. Estas perguntas, segundo Pinto (2001) servem fundamentalmente "para avaliar os conhecimentos teóricos e os saberes de natureza declarativa". De acordo, ainda, com este autor "a avaliação do conhecimento escolar, ou outros conhecimentos de índole geral, por meio de perguntas de escolha múltipla é cada vez mais frequente e popular entre os docentes, alunos e instituições. Grande parte desta popularidade entre os docentes advém da facilidade de correção, para os alunos da eliminação da subjetividade de correção reduzindo substancialmente o poder discricionário dos docentes, para as instituições pelos ganhos económicos substanciais que a sua aplicação apresenta quando está em causa a avaliação de milhares de alunos".

3.2.1 Como criar um exercício

Para conceber um exercício, usando o *Sage Mathematics* e o pacote MEGUA, deve-se criar uma "*worksheet*" que contemple a informação que consta na tabela 3.1:

1. from megua.all import *
2. meg = MegBookWeb("/home/nbuser/mp2013web.sqlite")
3. meg.save(r' ' '
   (a) %summary
   (b) %problem
   (c) %answer
   <multiplechoice>
   <choice> *vresposta* </choice>
   <choice> *errada*1 </choice>
   <choice> *errada*2 </choice>
   <choice> *errada*3 </choice>
   </multiplechoice>
   A resposta é *vresposta*
   (d) class E97k40_aaaa_001(Exercise):
   (e) def make_random(s):
   $s.v1 =$
   $s.v2 =$
   (f) def solve(s):
   $s.vresposta =$
   #Opções Erradas
   $s.errada1 =$
   $s.errada2 =$
   $s.errada3 =$

   ' ' ')

Tabela 3.1: Como criar um exercício

De seguida, e de acordo com a tabela 3.1, especifica-se cada etapa necessária para a criação de um exercício:

1. Esta instrução carrega o pacote MEGUA e as suas funções.

2. É aberta a base de dados que contém os exercícios criados em que meg passa a especificar essa base de dados.

3. Inicia-se o exercício, esta instrução grava o exercício descrito entre (r' ' ' e ' ' ')

   (a) Faz-se uma breve descrição do problema, podendo-se usar palavras chave.

   (b) Atribui-se um título sugestivo ao problema e escreve-se o seu enunciado.

   (c) O bloco de escolha múltipla tem sempre a sintaxe supraindicada, com quatro opções de resposta, em que a primeira é sempre a única correta. De seguida aparece a resposta correta e apresenta-se uma resolução pormenorizada do problema.

   (d) O nome da classe é o nome do exercício E97k40_aaaa_001 em que E97k40 designa o código MSC (*Mathematical Subject Classification*) mais apropriado para o exercício.

   (e) A função *make_random* é usada para declarar os parâmetros que ocorrem no texto na parte do enunciado do problema.

   (f) A função *solve* é onde os parâmetros que ocorrem na parte da resposta tomam valores calculados com base nos parâmetros escolhidos na parte do problema.

Deve salientar-se que os textos referentes a *%sumary*, *%problem* e *%answer* estão escritos em linguagem tipográfica LaTeX.

A produção de valores referentes a *make_random* e a *solve* é realizada com base na programação em *Python/Sagemath.*

s.v1 e *s.v2* são chamados de parâmetros em que *v1* e *v2* ocorrem no texto. O s. designa que os parâmetros pertencem ao exercício e não são variáveis locais .

Na criação de exercícios, por vezes, pode ser necessário a utilização de objetos gráficos como função dos parâmetros que os caraterizam. Para tal pode usar-se as potencialidades do LaTeX, do HTML, ou pacotes gráficos especializados como é o caso do Tikz. Este último pode ser, também, usado na exportação de gráficos construídos no Geogebra.

O resultado de cada exercício é um ficheiro HTML que pode ser visualizado com um *sfhit+enter* na primeira vez e com a tecla F5 para posteriores atualizações.

3.2.2 Exercícios criados

Nesta secção apresenta-se um exemplo de uma concretização, uma possível resolução, bem como uma breve descrição para todos os exercícios parametrizados criados. Sempre que oportuno salientam-se alguns aspetos, tais como: o grau de dificuldade do exercício para os alunos dos respetivos anos; as variáveis que foram implementadas na parte da programação; os desafios/dificuldades no âmbito dos exercícios concebidos; e quais as opções tomadas na definição das respostas erradas. No que concerne a estas respostas tentou-se, genericamente, fazer um levantamento dos erros mais comuns praticados pelos alunos, aquando da resolução deste tipo de exercícios, para inserção nas respetivas opções. Saliente-se que nas concretizações apresentadas a resposta correta aparece sempre mencionada em primeiro lugar, no entanto na plataforma SIACUA a mesma aparece numa posição aleatória.

Note-se que a partir de um exercício parametrizado consegue-se obter uma panóplia de enunciados, bastando, para isso, alterar os valores dos parâmetros. O código fonte relativo a cada exercício pode ser consultado nos apêndices, estando indicado em cada exercício o número da página do respetivo apêndice. A base de dados de exercícios criada, pretende abranger os conteúdos relativos ao domínio OTD desde o 5º até ao 8º ano.

Exercício **E97k40_variaveis_001** (ver código fonte na pág. 123):

Este exercício trabalha a classificação de variáveis. O grau de resolução, por parte do aluno, é fácil. As variáveis parametrizadas aparecem no enunciado. Em termos de programação foram criadas listas com exemplos de cada tipo de variáveis em estudo. Nas respostas de escolha múltipla estavam contempladas a resposta certa, que correspondia ao tipo de variável pedida no enunciado, e as respostas erradas que contemplavam os outros tipos de variáveis. Em termos de resposta detalhada, também se teve que definir três casos distintos para cada tipo de variável (qualitativa, quantitativa discreta e quantitativa contínua).

Enunciado:

Das seguintes variáveis indica a que é quantitativa discreta

- ☐ Número de filhos
- ☐ Temperatura de uma sala
- ☐ Tempo de duração de uma chamada telefónica
- ☐ Cor dos olhos

Proposta de resolução:

A resposta correta é “Número de filhos” porque só pode tomar um número finito ou uma infinidade numerável de valores. “É contável”.

Exercício **E97k40_frequencia_relativaversao2_001** (ver código fonte na pág. 127):

Com este exercício pretende-se trabalhar a noção de frequência relativa em percentagem. Os dados são apresentados numa tabela de frequências absolutas. As variáveis parametrizadas são todos os valores da tabela e no enunciado é o número de livros. O exercício tem um grau de dificuldade médio, geralmente os alunos apresentam dificuldades no cálculo de percentagens.

Enunciado:

Na turma do João, no início do ano letivo, a professora de Português perguntou quantos livros cada um dos alunos tinha lido nas férias. Na tabela seguinte encontram-se as respostas dadas pelos alunos:

Número de livros lidos	Número de alunos
0	2
1	4
2	5
3	5
4	4

Indica a percentagem de alunos que leu pelo menos 2 livros.

- ☐ 70
- ☐ 25
- ☐ 30
- ☐ 55

Proposta de resolução:

Ler pelo menos 2 livros é o mesmo que ler 2 livros ou mais. Para calcular a percentagem dividimos o nº de alunos que leram no mínimo 2 livros pelo total de alunos e de seguida multiplicamos por 100, ou seja,

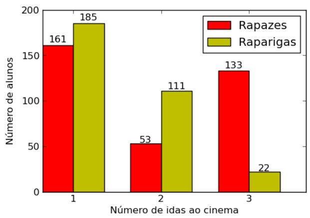
$$\frac{5+5+4}{2+4+5+5+4} \times 100 = \frac{14}{20} \times 100 = 0.7 \times 100 = 70\%$$

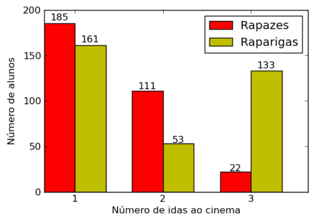
Exercício **E97k40_grafico_tabela_001** (ver código fonte na pág. 131):

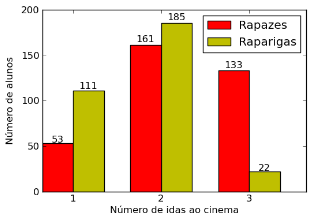
Neste exercício analisa-se a apresentação de dados na forma de tabela e na forma de gráfico de barras. As variáveis parametrizadas definidas são as diferentes frequências absolutas referentes ao número de rapazes e de raparigas, que vão 1, 2 ou 3 vezes ao cinema por mês, e consequentemente o número total de alunos da escola, também, é uma variável parametrizada bem como a tabela e o gráfico de barras. Em termos de programação foi um desafio a construção dos diferentes gráficos. Em relação ao grau de dificuldade, este exercício é considerado de fácil resolução pois os alunos apenas têm que relacionar as frequências absolutas.

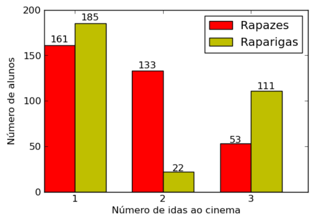
Enunciado: Numa escola com 744 alunos, fez-se um estudo sobre o número de vezes que, em média, as raparigas e os rapazes da escola iam ao cinema por mês. Qual dos gráficos seguintes representa os dados da tabela?

	Nº de idas ao cinema por mês	
	rapazes	raparigas
1 vez	198	166
2 vezes	81	144
3 vezes	130	25

☐ 

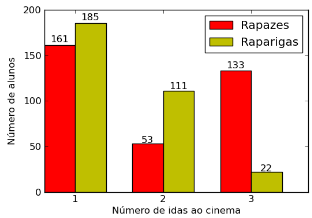
☐ 

☐ 

☐ 

Proposta de resolução:

O gráfico que representa os dados da tabela está abaixo porque é neste que as frequências absolutas são iguais na tabela e no gráfico.



Exercício **E97k40_graficocircularversao2_001** (ver código fonte na pág. 135):

Com este exercício pretende-se relacionar a frequência relativa em percentagem com a frequência absoluta, estando a informação representada num gráfico circular.

As variáveis parametrizadas aparecem:

- no enunciado: "a quantia de água gasta";
- na questão "o setor em que se gastou a água";
- nas frequências relativas, em percentagem, referentes a cada setor circular.

Em termos de programação construiu-se um gráfico circular. Na definição das respostas erradas foram consideradas várias alternativas de acordo com o setor selecionado na questão. No que se refere à resposta detalhada, também, foram descritas várias alternativas em função do setor selecionado na questão. O problema apresentado tem um grau de resolução fácil, no entanto alguns alunos apresentam dificuldades no calculo das percentagens.

Enunciado:

Durante um dia o João gastou 150 litros de água distribuídos da seguinte forma:

Indica quantos litros de água gastou, nesse dia, na utilização de alimentação

- ☐ 4.5
- ☐ 15.0
- ☐ 31.5
- ☐ 63.0

Proposta de resolução:

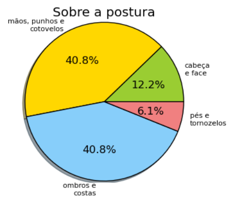
O João gastou 3% de água na alimentação o que corresponde a 3% de 150 litros de água, ou seja, $3 \times 0.01 \times 150 = 4.5$ litros de água.

Exercício **E97k40_graficocircular_barras_001** (ver código fonte na pág. 139):

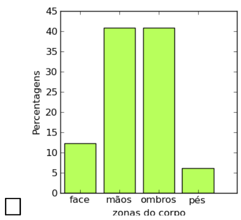
Este exercício pretende averiguar a correspondência entre a informação contida num gráfico circular e a de um gráfico de barras. Em cada gráfico apresenta-se a frequência relativa em percentagem. As variáveis parametrizadas correspondem às frequências de cada setor. O maior desafio, em termos de programação, foi a construção dos gráficos. O problema é de fácil resolução.

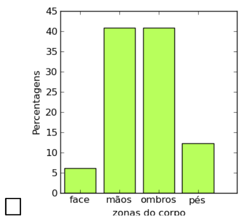
Enunciado:

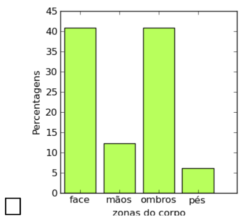
O gráfico circular que se segue fornece informação sobre as zonas do corpo onde as lesões provocadas por mochilas são mais frequentes.

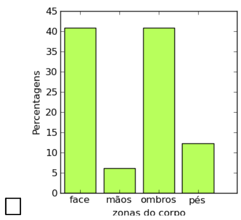


A Marta e três das sua amigas construiram, cada uma, um gráfico de barras que traduzisse a mesma informação do gráfico circular. Qual dos gráficos seguintes traduz a informação do gráfico circular?

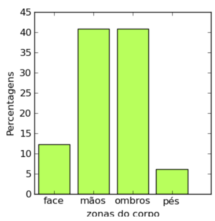








Proposta de resolução: O gráfico correto é o que está abaixo porque é neste que as percentagens são iguais nos dois gráficos.



Exercício **E97k40_media_001** (ver código fonte na pág. 159):

O objetivo do exercício é calcular a média de um conjunto de dados. Este exercício é de fácil resolução, o aluno apenas tem que aplicar a noção de média. As variáveis parametrizadas consideradas foram a dimensão da amostra e cada elemento da mesma. A dimensão da amostra pode variar entre 8 e 20 elementos. A cada elemento da amostra pode ser atribuído qualquer número inteiro compreendido entre 0 e 15.

Enunciado:

Determina a média do seguinte conjunto de dados:

$$\{3, 1, 13, 9, 15, 5, 14, 15, 4, 5, 11, 3, 9, 6, 14, 4, 15, 0, 5\}$$

Se possível, apresenta o resultado com duas casas decimais.

- □ ≈ 7.95
- □ $= 151$
- □ ≈ 6.95
- □ ≈ 8.95

Proposta de resolução:

A média aritmética de um conjunto de dados é igual ao quociente entre a soma de todos os dados, que é 151, e o número total de dados, 19. Ou seja, é

$$\bar{x} = \frac{3+1+13+9+15+5+14+15+4+5+11+3+9+6+14+4+15+0+5}{19} = \frac{151}{19} \approx 7.95$$

Exercício **E97k40_media_tabelas_001** (ver código fonte na pág. 171):

Com este exercício pretende-se trabalhar a noção de média. Os dados estão organizados numa tabela. As variáveis parametrizadas consideradas neste exercício são: número de alunos da turma; e todos os valores que constam na tabela (idades dos alunos e respetiva frequência absoluta). O número de alunos por turma pode tomar qualquer valor inteiro compreendido entre 20 e 30; as idades dos alunos podem variar entre os 9 e os 17 anos. O exercício tem um grau de dificuldade fácil porque se aplica diretamente a definição de média em dados agrupados.

Enunciado:

Na tabela seguinte estão representadas as idades dos 24 alunos de uma turma.

idades	número de alunos
9	4
10	15
11	3
12	2

A média das idades dos alunos da turma é:

- □ ≈ 10.13
- □ ≈ 60.75
- □ $= 6$
- □ ≈ 10.5

Proposta de resolução:

Para determinar a média temos que adicionar as idades de todos os alunos e dividir, essa soma, pelo número total de alunos, ou seja,

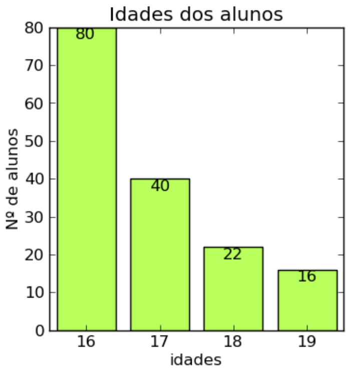
$$\frac{9 \times 4 + 10 \times 15 + 11 \times 3 + 12 \times 2}{4 + 15 + 3 + 2} = \frac{243}{24} \approx 10.13$$

Exercício **E97k40_media_grafico_002** (ver código fonte na pág. 174):

Este exercício trabalha a noção de média. Os dados são apresentados através de um gráfico de barras. As variáveis parametrizadas aparecem no gráfico e correspondem às idades dos alunos e às respetivas frequências absolutas. O exercício é de fácil resolução pois os alunos após fazerem uma leitura adequada dos dados do gráfico, aplicam diretamente a noção de média. Em termos de programação foi sempre um desafio constante a construção dos respetivos gráficos.

Enunciado:

Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos de um dos anos de escolaridade da sua escola, tendo elaborado um gráfico da distribuição das idades. O gráfico que o João elaborou está correto e apresenta-se a seguir.



Qual é a média das idades dos alunos desse ano de escolaridade, da escola do João?

- ☐ ≈ 16.8
- ☐ ≈ 39.5
- ☐ ≈ 17.5
- ☐ ≈ 38.0

Proposta de resolução:

Para determinar a média temos que adicionar as idades de todos os alunos e dividir, essa soma, pelo número total de alunos, ou seja,

$$\frac{16\times 80+17\times 40+18\times 22+19\times 16}{80+40+22+16}=\frac{2660}{158}\approx 16.8 \quad anos$$

Exercício **E97k40_media_caulefolhas_001** (ver código fonte na pág. 183):

Com este exercício pretende-se aplicar a definição de média. Os dados estão representados num diagrama de caule-e-folhas. O exercício tem um grau de dificuldade fácil pois o aluno aplica diretamente a definição de média. As variáveis parametrizadas definidas são: a dimensão da amostra, que pode assumir qualquer número inteiro compreendido entre 15 e 30; e cada elemento da amostra, que pode tomar qualquer número inteiro compreendido entre 24 e 60. Ao variar a dimensão e cada elemento da amostra, consequentemente é gerado um diagrama de caule-e-folhas diferente.

Enunciado:

As idades dos professores que participaram numa reunião estão representadas no diagrama de caule e folhas que se segue.

```
O ponto decimal está 1 dígito para a direita de |

2 | 4677899

3 | 018

4 | 113399

5 | 346

6 | 0
```

A média das idades dos professores é:

- ☐ 38.9
- ☐ 39.9
- ☐ 41
- ☐ 37.9

Proposta de resolução: A soma das idades é:

$24+26+27\times 2+28+29\times 2+30+31+38+41\times 2+43\times 2+49\times 2+53+54+56+60=778.$

O número de professores é 20.

A média das idades dos professores é igual ao quociente entre a soma das suas idades e o total de professores, ou seja,

$$\bar{x}=\frac{778}{20}\approx 38.9 \quad anos$$

Exercício **E97k40_media_002** (ver código fonte na pág. 161):

O objetivo do exercício é aplicar a noção de média. Este exercício tem um grau de dificuldade considerável, porque o aluno tem que relacionar vários dados do problema. As variáveis parametrizadas são: nº de alunos da turma (qualquer número inteiro compreendido entre 20 e 30); a média dos resultados do teste (qualquer número inteiro compreendido entre 65 e 85); a classificação atribuída ao aluno erradamente (qualquer número inteiro compreendido entre 25 e 55); e a classificação correta do aluno (qualquer número inteiro compreendido entre 60 e 90).

Enunciado:

A professora de matemática aplicou um teste a uma turma com 21 alunos. Depois de ter corrigido os testes, calculou a média dos resultados e obteve 74%. Ao verificar novamente esses resultados concluiu que havia um erro num deles. A classificação de 62% obtida por um aluno tinha sido trocada, tendo-lhe sido atribuída erradamente a classificação de 50%. Qual é a média correta dos resultados do teste de Matemática, após a correção do erro?

- ☐ 74.57%
- ☐ 15.52%
- ☐ 76.95%
- ☐ 75.57%

Proposta de resolução:

Se fizermos a diferença entre o valor correto e o valor errado obtemos: 62% - 50% = 12%. A média correta é

$$\begin{aligned}\bar{x} =& \frac{\text{soma das classificações corrigidas dos 21 alunos}}{21} = \\ =& \frac{\text{soma das classificações dos 21 alunos} + 12}{21} = \\ =& \frac{\text{soma das classificações dos 21 alunos}}{21} + \frac{12}{21} = \\ =& 74 + \frac{12}{21} \approx 74.57\%.\end{aligned}$$

Exercício **E97k40_media_003** (ver código fonte na pág. 163):

Com este exercício pretende-se aplicar a noção de média. As variáveis parametrizadas consideradas foram: a cotação média das primeiras fichas; o número de fichas realizadas em primeiro lugar; a cotação média das últimas fichas; e o número de fichas realizadas em último lugar. O problema tem um grau de dificuldade considerável pois o aluno não aplica diretamente a noção de média.

Enunciado:

O José teve uma cotação média de 66% nas primeiras 4 fichas de trabalho que realizou. Nas 2 fichas seguintes a cotação média foi de 92%.A cotação média de todas as fichas realizadas é:

- ☐ 74.67%
- ☐ 79.0%
- ☐ 26.33%
- ☐ 81.33%

Proposta de resolução:

O aluno realizou 4+2=6 fichas de trabalho.

A cotação média de todas as fichas de trabalho realizadas será igual ao quociente entre a cotação de todas as fichas e o número de fichas realizadas, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{4 \times 66 + 2 \times 92}{4+2} = \frac{448}{6} \approx 74.67\%$$

.

Exercício **E97k40_media_004** (ver código fonte na pág. 166):

Com este exercício pretende-se aplicar a definição de média. As variáveis parametrizadas são o total de atletas e a respetiva altura média, o número de atletas femininas e a altura média das mesmas. A resolução do problema tem um grau de dificuldade médio porque tem que relacionar os vários dados do problema e a aplicação da média não é direta.

Enunciado:

Numa associação desportiva, a altura média dos seus 160 atletas (femininas e masculinos) é de 1.83 metros. As atletas são 91 e têm de altura média 1.71 metros. Determina a altura média dos atletas masculinos. Se possível, apresenta o resultado com duas casas decimais.

- ☐ ≈ 1.99
- ☐ ≈ 1.77
- ☐ ≈ 1.51
- ☐ ≈ 1.95

Proposta de resolução:

O número de atletas masculinos é: $160 - 91 = 69$.

A soma das alturas de todos os atletas é: $160 \times 1.83 = 292,8$ metros.
A soma das alturas de todas as atletas é: $91 \times 1.71 = 155,61$ metros.
Logo, a soma das alturas de todos os atletas masculinos é: $160 \times 1.83 - 91 \times 1.71 = 292,8 - 155,61 = 137,19$ metros.

A média das alturas dos atletas masculinos é igual ao quociente entre a soma das alturas dos atletas masculinos e o número desses atletas.

Ou seja

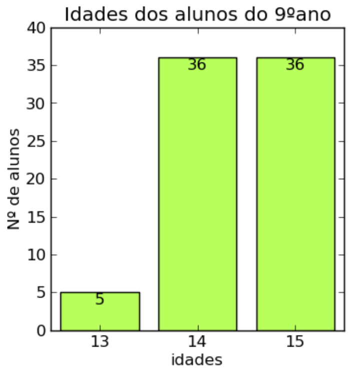
$$\bar{x} = \frac{160 \times 1.83 - 91 \times 1.71}{69} = \frac{137.19}{69} \approx 1.99 \quad metros$$

Exercício **E97k40_media_grafico_001** (ver código fonte na pág. 177):

Este exercício trabalha a noção de média. Os dados são apresentados através de um gráfico de barras. A variável parametrizada no enunciado do exercício é a média das idades dos alunos e no gráfico são as frequências absolutas. Em termos de programação e em relação à resposta detalhada houve necessidade de criar três respostas distintas, de acordo com os diferentes valores da média. Em relação à definição das respostas de escolha múltipla, também, se diferenciaram em três situações, em função do valor parametrizado da média. Este exercício tem um grau de dificuldade elevado pois o aluno tem que equacionar o problema e resolver a respetiva equação.

Enunciado:

Um dos trabalhos realizados pela Inês e pelo Bruno para a disciplina de Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9º ano da sua escola, elaborar um gráfico da distribuição das idades dos alunos e determinar a sua média. Depois de recolherem os dados, o Bruno e a Inês combinaram que o Bruno ia elaborar o gráfico e a Inês ia determinar a média. A figura mostra o gráfico elaborado pelo Bruno.



O Gráfico não está completo pois o Bruno esqueceu-se de considerar os alunos com 16 anos. A média das idades, corretamente obtida pela Inês, é 15,5 anos. Quantos alunos com 16 anos frequentam o 9º ano na escola da Inês e do Bruno?

- ☐ 169
- ☐ 133
- ☐ 61
- ☐ 149

Proposta de resolução:

Se x representar o número de alunos com 16 anos, usando a definição de média obtém-se a equação:

$$\begin{aligned}\frac{13 \times 5 + 14 \times 36 + 15 \times 36 + 16 \times x}{5 + 36 + 36 + x} = 15.5 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1109 + 16x}{77 + x} = 15.5 \\ &\Leftrightarrow 1109 + 16x = 15.5 \times 77 + 15.5x \\ &\Leftrightarrow 16x - 15.5x = 1193.5 - 1109 \\ &\Leftrightarrow 0.5x = 84.5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{84.5}{0.5} = 169\end{aligned}$$

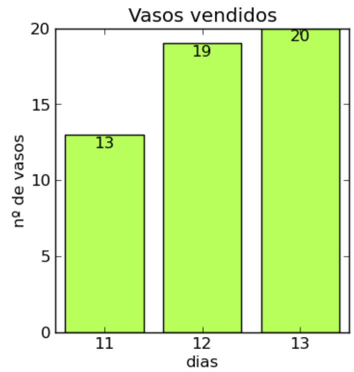
R: Frequentam o 9ºano, 169 alunos, com 16 anos.

Exercício **E97k40_media_grafico_003** (ver código fonte na pág. 181):

Com este exercício pretende-se aplicar a noção de média. Os dados estão representados através de um gráfico de barras. No enunciado surge a variável parametrizada - nº médio de vasos vendidos por dia, nos primeiros 10 dias de junho. Em relação ao gráfico, as variáveis parametrizadas são as frequências absolutas. Este exercício tem um grau de dificuldade médio pois o aluno primeiro tem que determinar o número de vasos vendidos nos primeiros dez dias de junho e posteriormente calcula a média.

Enunciado:

O gráfico mostra o número de vasos com manjericos vendidos, num arraial, nos dias 11, 12 e 13 de junho. O número médio de vasos com manjericos vendidos por dia, nesse arraial, nos primeiros dez dias do mês de junho, foi igual a 3.



Qual foi o número médio de vasos com manjericos vendidos por dia, nesse arraial, nos primeiros treze dias de Junho?

- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 17
- ☐ 14

Proposta de resolução:

Nos primeiros 10 dias venderam -se um total $3 \times 10 = 30$ vasos.

Para determinar a média dos vasos vendidos nos primeiros treze dias do mês temos que adicionar os vasos vendidos nesses treze dias e dividir pelos treze dias. Ou seja, a resposta é

$$\frac{13 + 19 + 20 + 30}{13} \approx 6 \quad vasos$$

Exercício **E97k40_media_005** (ver código fonte na pág. 168):

Com este exercício pretende-se aplicar as propriedades da média. As variáveis parametrizadas foram as seguintes: dimensão da amostra; a média da amostra; e o valor pelo qual se vai multiplicar cada elemento da amostra. O nível de dificuldade para este problema é fácil pois aplica diretamente a propriedade.

Enunciado:

A média de uma amostra de 19 elementos é 10. Qual é a média desta amostra se substituir cada elemento pelo seu quíntuplo?

- ☐ 50
- ☐ 15
- ☐ 10
- ☐ 95

Proposta de resolução:

A soma dos 19 elementos da nova amostra é $5 \times 10 \times 19$.

Então a média é:

$$\bar{x} = \frac{5 \times 10 \times 19}{19} = 5 \times 10 = 50$$

Multiplicando cada elemento de um conjunto de números por uma constante, a média, vem multiplicada por essa constante.

Exercício **E97k40_media_006** (ver código fonte na pág. 169):

Com este exercício pretende-se aplicar as propriedades da média. As variáveis parametrizadas foram as seguintes: dimensão da amostra; a média da amostra; e o valor pelo qual se vai adicionar cada elemento da amostra. O nível de dificuldade para este problema é fácil pois o aluno aplica diretamente a propriedade.

Enunciado:

A média de uma amostra de 9 elementos é 11. Qual é a média desta amostra se a cada elemento se adicionar o número 7?

- ☐ 18
- ☐ 17
- ☐ 9
- ☐ 27

Proposta de resolução:

A média é

$$\begin{aligned}\bar{x} =& \frac{\text{soma dos 9 elementos} + 9 \times 7}{9} = \\ =& \frac{\text{soma dos 9 elementos}}{9} + \frac{9 \times 7}{9} = \\ =& 11 + 7 = 18\end{aligned}$$

Se adicionarmos um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto de números, a média vem adicionada a essa constante.

Exercício **E97k40_mediana_001** (ver código fonte na pág. 185):

Este exercício trabalha a noção de mediana. As variáveis parametrizadas correspondem a cada elemento do conjunto dado. O conjunto tem um número ímpar de elementos. O grau de dificuldade é simples pois o aluno aplica a noção de mediana.

Enunciado:

Determina a mediana do seguinte conjunto de dados:

$$\{5, 16, 21, 8, 26\}$$

.

- ☐ 16
- ☐ 21
- ☐ 5
- ☐ 8

Proposta de resolução:

Para encontrar o valor da mediana primeiro deve-se ordenar o conjunto de dados (por ordem crescente ou decrescente):

$$\{5, 8, 16, 21, 26\}$$

Como neste conjunto há um número ímpar de elementos, a mediana é o valor que ocupa a posição central (3ª posição), ou seja, é

$$\tilde{x} = 16$$

Exercício **E97k40_mediana_002** (ver código fonte na pág. 187):

Este exercício trabalha a noção de mediana. As variáveis parametrizadas correspondem a cada elemento do conjunto dado. O conjunto tem um número par de elementos. Este exercício é de fácil resolução pois aplica-se a noção de mediana.

Enunciado:

Considera o seguinte conjunto de dados: $\{5, 14, 18, 10, 25, 29\}$.

A mediana é:

- ☐ 16
- ☐ 18
- ☐ 14
- ☐ 10

Proposta de resolução:

Para encontrar o valor da mediana primeiro deve-se ordenar o conjunto de dados (por ordem crescente ou decrescente):

$$\{5, 10, 14, 18, 25, 29\}$$

Como o conjunto de dados tem um número par de elementos, então a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais(3ª e 4ª posição):

$$\tilde{x} = \frac{14 + 18}{2} = 16$$

Exercício **E97k40_mediana_003** (ver código fonte na pág. 189):

Com este exercício pretende-se calcular a mediana de um conjunto de dados. As variáveis parametrizadas estão relacionadas com a dimensão da amostra e com cada elemento da mesma. A dimensão desta pode variar entre 8 e 20, e cada elemento pode tomar qualquer valor inteiro compreendido entre 0 e 15. Na programação teve-se em linha de conta se a amostra tinha dimensão par ou ímpar e para cada uma destas situações foram definidas as respostas de escolha múltipla. Na apresentação da resolução, também se teve em consideração as duas situações descritas. O problema é de fácil resolução pois os alunos têm que aplicar a definição de mediana, no entanto muitas vezes os alunos erram por não ordenarem o conjunto de dados.

Enunciado:

Determina a mediana do seguinte conjunto de dados:

$$\{7,1,12,7,12,12,0,7,2,14,1,0,9,15,15,2,10,0,9\}$$

- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 15
- ☐ 6

Proposta de resolução:

A resposta é 7.

Para encontrar o valor da mediana primeiro deve-se ordenar o conjunto de dados (por ordem crescente ou decrescente):

$$\{0,0,0,1,1,2,2,7,7,\underbrace{7}_{\tilde{x}=7},9,9,10,12,12,12,14,15,15\}$$

Como neste conjunto há 19 elementos, que é um número ímpar, então a mediana é 7, porque é o valor que ocupa a posição central, que neste caso é 10ª posição.

Exercício **E97k40_mediana_tabelas_001** (ver código fonte na pág. 192):

Com este exercício pretende-se aplicar a noção de mediana. Os dados estão organizados numa tabela de frequências absolutas. As variáveis parametrizadas foram o número de alunos da turma e todos os valores constantes da tabela, com a condição que a soma das frequências absolutas tinha que ser igual ao número de alunos da turma. Para o cálculo da mediana teve que se ter em consideração, se o número de alunos da turma era par ou ímpar. De acordo com cada caso foram definidas as respostas de escolha múltipla em função das várias alternativas possíveis. Na resposta detalhada, também, se geraram duas situações distintas em relação ao número de alunos, o ser par ou ímpar. Este exercício apresenta um grau de dificuldade médio pelo facto dos dados estarem organizados numa tabela e não é tão evidente para os alunos calcularem a mediana.

Enunciado:

Na tabela seguinte estão representadas as idades dos 27 alunos de uma turma.

idades	nº de alunos
17	4
18	20
19	2
20	1

A mediana das idades dos alunos da turma é:

- ☐ 18
- ☐ 17
- ☐ 19
- ☐ 20

Proposta de resolução:

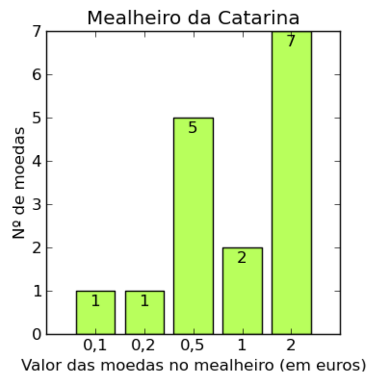
A turma tem um número ímpar de alunos. Então a mediana é 18, porque é a idade correspondente ao aluno que ocupa a posição central, ou seja a 14ª posição.

Exercício **E97k40_mediana_grafico_001** (ver código fonte na pág. 198):

Com este exercício pretende-se determinar a mediana, estando os dados apresentados sob a forma de gráfico de barras. As variáveis parametrizadas correspondem ao *número de moedas do mealheiro* e, ainda, às *frequências absolutas* correspondentes aos diferentes tipos de moedas existentes no mesmo. Em termos de programação definiu-se uma partição para determinar as frequências absolutas. Em seguida, definiu-se uma lista com os dados apresentados. A mediana foi calculada em função da dimensão da amostra poder ser par ou ímpar. Do mesmo modo, em termos da explicação da resposta, também, se apresentaram respetivamente duas situações diferentes. O problema tem um grau de dificuldade médio pelo facto dos dados estarem apresentados num gráfico e a partir destes, ainda, têm que definir o valor central ou valores centrais.

Enunciado:

A Catarina guarda no mealheiro moedas de valor maior ou igual a dez cêntimos. A distribuição dos valores, em euros, das moedas que a Catarina tem no mealheiro está apresentada no gráfico de barras. Determina a mediana dos valores das moedas.



- ☐ 1
- ☐ 0.1
- ☐ 0.2
- ☐ 2

Proposta de resolução:

A Catarina tem 16 moedas, que é um número par de moedas.

Então, a mediana é 1, porque é igual à média do valor das moedas que ocupam a 8ª posição e a 9ª posição. Ou seja,

$$\tilde{x} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Exercício **E97k40_mediana_caulefolhas_001** (ver código fonte na pág. 203):

Com este exercício pretende-se aplicar a definição de mediana para uma amostra de dimensão par ou ímpar. Os dados apresentam-se na forma de um diagrama de caule-e-folhas. As variáveis parametrizadas consideradas no problema foram a dimensão da amostra e cada elemento da mesma. O diagrama de caule-e-folhas depende das variáveis parametrizadas. Quer para a apresentação detalhada da resolução, quer para definição das respostas de escolha múltipla, teve-se em consideração o facto da dimensão da amostra ser par ou ímpar. O problema é de fácil resolução uma vez que os dados estão todos representados por ordem e apenas tem-se que aplicar a noção de mediana.

Enunciado:

Numa zona industrial estão instaladas várias empresas. A distribuição do número de empregados pelas diversas empresas é apresentada no diagrama de caule-e-folhas que se segue.

```
O ponto decimal está 1 dígito para a direita de |

1 | 2234

1 | 79

2 | 01234

2 | 66889

3 | 00
```

A mediana do número de empregados por empresa é:

- ☐ 22.5
- ☐ 23.5
- ☐ 12
- ☐ 30

Proposta de resolução:

Como há 18 empresas, que é um número par, então a mediana é igual à média do número de empregados das empresas que ocupam os dois valores centrais (9^{o} e 10^{o}), ou seja,

$$\tilde{x} = \frac{22+23}{2} = 22.5 \quad \textit{empregados}$$

Exercício **E97k40_medianaversao2_tabelas_002** (ver código fonte na pág. 195):

Este exercício trabalha a noção de mediana. Os dados estão apresentados na forma de tabela. As variáveis parametrizadas surgem na tabela e correspondem à frequência absoluta. O enunciado contém a variável parametrizada *idade mediana dos alunos*. Em termos de programação, para cada valor concretizado da mediana houve necessidade de apresentar três respostas pormenorizadas. Em relação à definição das respostas de escolha múltipla, também, foram definidas de acordo com a variável parametrizada. O grau de dificuldade é médio pois os alunos têm que analisar os dados apresentados, a dimensão da amostra e o conceito de mediana.

Enunciado:

Na escola do João há três modalidades no Desporto Escolar: natação, futebol e dança. Na tabela são apresentados os dados relativos ao número de alunos da escola inscritos, na modalidade de futebol, em função da sua idade.

idade	11	12	13	14	15
futebol	2	4	a	5	14

Sabendo que a idade mediana dos alunos que praticam futebol é 14.5, o valor de a é:

- ☐ 3
- ☐ 14
- ☐ 13
- ☐ 11

Proposta de resolução:

Se a mediana é 14,5 é porque o número de alunos é par e por isso os valores centrais correspondem a 14 e 15 anos.

Nesse caso têm que ser tantos valores inferiores ou iguais a 14 como o número de dados iguais a 15.

Como há $11 + a$ dados inferiores ou iguais a 14 e 14 dados iguais a 15 então $a = 14 - 11 = 3$.

Exercício **E97k40_moda_002** (ver código fonte na pág. 206):

Este exercício trabalha a noção de moda. As variáveis parametrizadas são a dimensão da amostra e cada elemento da mesma. Cada conjunto pode ter entre 10 e 16 elementos e cada elemento pode tomar qualquer número inteiro compreendido entre 0 e 9. Em termos de programação garantiu-se que existia sempre uma moda. O grau de dificuldade é fácil pois apenas os alunos aplicam a noção de moda.

Enunciado: **E97k40_moda_002**

Considera o seguinte conjunto de dados

$$\{5, 2, 9, 8, 9, 6, 9, 2, 9, 6, 3, 5, 4, 0, 5, 0\}$$

Indique, caso exista, a moda.

- ☐ 9
- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ 7

Proposta de resolução:

A resposta é 9.

A moda é o valor que se repete mais vezes: 9 repete-se 4 vezes.

Exercício **E97k40_moda_tabelas_001** (ver código fonte na pág. 208):

Este exercício trabalha a noção de moda. Neste exercício os dados estão organizados numa tabela. No enunciado da questão foi parametrizada a variável número de alunos da turma. Foram, ainda, parametrizadas as variáveis correspondentes às frequências absolutas. O número de alunos que obtiveram nível um variou entre 1 e 3. Para a definição das outras frequências foi considerada uma partição com o número de alunos que não obtiveram nível 1. Este exercício é de fácil resolução pois o aluno apenas tem que aplicar o conceito de moda.

Enunciado:

Na tabela seguinte estão representados os resultados a Matemática dos 30 alunos de uma turma do 7ºano.

nível	número de alunos
1	2
2	1
3	8
4	16
5	3

A moda dos níveis atribuídos aos alunos da turma é:

- ☐ 4
- ☐ 1
- ☐ 16
- ☐ 2

Proposta de resolução:

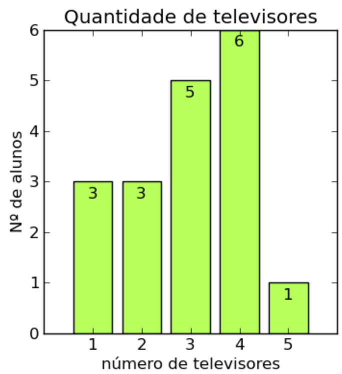
Relativamente aos níveis atribuídos na disciplina de Matemática, concluiu-se que a moda é 4 pois é o nível que a maioria dos alunos obteve.

Exercício **E97k40_grafico_modaversao2_001** (ver código fonte na pág. 211):

Este exercício trabalha a noção de moda. Os dados são apresentados na forma de gráfico de barras. As variáveis parametrizadas consideradas no exercício foram o número de alunos da turma (que pode assumir qualquer valor inteiro entre 17 e 22) e as frequências absolutas referentes ao número de televisores que cada aluno possui. Em termos de programação este exercício foi exigente ao nível da construção do gráfico e na definição das variáveis. A resolução do mesmo tem um grau de resolução fácil pois apenas tem que aplicar a noção de moda.

Enunciado:

Foi realizado um questionário acerca do número de televisões que cada um dos alunos de uma turma tem em casa. Todos os alunos da turma responderam ao questionário. Na figura está representado o gráfico correspondente aos dados recolhidos. Relativamente ao número de televisores, a moda é:



- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ 6
- ☐ 3

Proposta de resolução:

A moda, relativa ao número de televisores, é 4. A maioria dos alunos da turma respondeu ter 4 televisores.

Exercício **E97k40_quartis_001** (ver código fonte na pág. 214):

Com este exercício pretende-se calcular os quartis de um conjunto de dados. O exercício tem um grau de resolução fácil, no entanto por vezes os alunos erram porque não ordenam o conjunto de dados. As variáveis parametrizadas definidas correspondem a cada elemento da amostra de dimensão 10. Cada elemento pode tomar qualquer valor inteiro compreendido entre 0 e 20. Este exercício é um caso particular do E97k40_quartis_002, considerou-se adequado mantê-lo por se tratar de uma situação em que o cálculo do 1º quartil não levanta qualquer problema. Quando a dimensão da amostra é 10 não existe a dúvida quanto à maneira de dividir a amostra em duas partes, e a mediana de cada uma das metades coincide com um dos dados, visto que cada parte tem 5 elementos.

Enunciado:

Considera o seguinte conjunto de dados $\{8, 14, 20, 18, 9, 19, 14, 10, 17, 19\}$.

O 1º e o 3º quartis são respetivamente:

- ☐ $Q_1 = 10 \qquad Q_3 = 19$
- ☐ $Q_1 = 20 \qquad Q_3 = 10$
- ☐ $Q_1 = 19 \qquad Q_3 = 10$
- ☐ $Q_1 = \frac{31}{2} \qquad Q_3 = 19$

Proposta de resolução:

1º: Devemos ordenar os dados:

$$\{8, 9, 10, 14, 14, 17, 18, 19, 19, 20\}$$

2º: Determinar a mediana:

A mediana é $\frac{14+17}{2} = 15.5$, divide o conjunto dos dados em duas partes (cada parte com o mesmo nº de dados).

$$8 \quad 9 \quad 10 \quad 14 \quad 14 \quad | \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 19 \quad 20$$

3º: Determinar Q_1 (1º quartil):

Considera-se a 1ª parte (dados à esquerda da mediana):

$$8 \quad 9 \quad \underbrace{10}_{Q_1} \quad 14 \quad 14$$

Calcula-se a mediana, que é 10. Logo $Q_1 = 10$.

4º: Determinar Q_3 (3º quartil):

Considera-se a 2ª parte (dados à esquerda da mediana):

$$17 \quad 18 \quad \underbrace{19}_{Q_3} \quad 19 \quad 20$$

Calcula-se a mediana, que é 19. Logo $Q_3 = 19$.

Exercício **E97k40_quartis_002** (ver código fonte na pág. 217):

Com este exercício pretende-se calcular os quartis de um conjunto de dados. O exercício tem um grau de resolução fácil. As variáveis parametrizadas definidas são a dimensão da amostra, que pode assumir qualquer valor inteiro compreendido entre 10 e 15, e cada elemento da mesma, o qual pode tomar qualquer valor inteiro compreendido entre 0 e 10. Na parte da programação teve-se em consideração a dimensão par ou ímpar da mostra. De acordo com a dimensão da amostra foram consideradas as diferentes respostas.

Enunciado:

Considera o seguinte conjunto de dados:

$$\{9, 2, 9, 5, 7, 0, 0, 5, 0, 8, 7\}$$

Q_1(1º quartil) e Q_3 (3º quartil) são respetivamente:

- ☐ $Q_1 = 0 \quad Q_3 = 8$
- ☐ $Q_1 = 0 \quad Q_3 = 5$
- ☐ $Q_1 = 8 \quad Q_3 = 0$
- ☐ $Q_1 = 5 \quad Q_3 = 8$

Proposta de resolução:

1º: Devemos ordenar os dados:

$$\{0, 0, 0, 2, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 9\}$$

2º: Determinar a mediana:

A mediana é 5, divide o conjunto dos dados em duas partes (cada parte com o mesmo nº de dados).

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad \underbrace{5}_{\tilde{x}} \quad 7 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 9$$

3º: Determinar Q_1:

Considera-se a 1ª parte (dados à esquerda da mediana): $0 \quad 0 \quad \underbrace{0}_{Q_1} \quad 2 \quad 5$

Calcula-se a mediana, que é 0. Logo $Q_1 = 0$.

4º: Determinar Q_3:

Considera-se a 2ª parte (dados à esquerda da mediana): $7 \quad 7 \quad \underbrace{8}_{Q_3} \quad 9 \quad 9$

Calcula-se a mediana, que é 8. Logo $Q_3 = 8$.

Exercício **E97k40_amplitude_001** (ver código fonte na pág. 222):

Com este exercício pretende-se trabalhar a noção de amplitude de dados. As variáveis parametrizadas são a dimensão da amostra e cada elemento da mesma. Em termos de programação não ocorreu qualquer tipo de dificuldade a registar. Este exercício é de fácil resolução, desde que o aluno conheça a definição de amplitude.

Enunciado:

Considera o seguinte conjunto de dados:

$$\{10, 13, 10, 4, 20, 3, 12, 19, 7, 3, 17, 4, 14, 0, 5\}$$

A amplitude de dados é:

- □ 20
- □ 19
- □ 0
- □ 10

Proposta de resolução:

A amplitude dos dados é a diferença entre o máximo e o mínimo da distribuição, ou seja é

$$20 - 0 = 20$$

Exercício **E97k40_amplitude_tabelas_001** (ver código fonte na pág. 224):

Este exercício trabalha a noção de amplitude de dados. Os dados são apresentados na forma de tabela. No enunciado a variável parametrizada foi "o número de questões", em relação à tabela foram parametrizados todos os seus valores. Em termos de programação foi considerada uma partição de forma a determinar aleatoriamente a frequência absoluta referente a cada valor da variável em estudo. O exercício é de fácil resolução, no entanto por vezes os alunos erram porque consideram o máximo e o mínimo das frequências absolutas.

A construção destas diferentes respostas implicou, quer na parte do texto, quer na parte da programação, a utilização de funções próprias.

Enunciado:

Um teste com 28 questões, intitulado Cultura Geral sobre a Europa , foi aplicado a um grupo de alunos. No final, registou-se o número de questões erradas por cada aluno e construiu-se a seguinte tabela:

n^{o} de respostas erradas	n^{o} de alunos
1	13
2	1
3	3
4	3
5	2
6	1
7	5

Em relação ao conjunto de dados apresentado, a amplitude de dados é:

- ☐ 6
- ☐ 12
- ☐ 8
- ☐ 3

Proposta de resolução:

Como a amplitude de dados é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo e sendo o mínimo de respostas erradas 1 e o máximo 7, então a amplitude $= 7 - 1 = 6$.

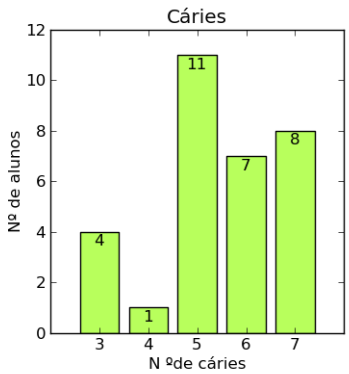
Exercício **E97k40_amplitude_grafico_001** (ver código fonte na pág. 227):

O objetivo deste exercício é determinar a amplitude de dados. Os dados são apresentados através de um gráfico de barras. As variáveis parametrizadas no exercício são: número de alunos; número de cáries; e as frequências absolutas correspondentes ao número de cáries. Em termos de programação construiu-se o gráfico de barras e para determinar as frequências absolutas considerou-se uma partição. O exercício é de fácil resolução, mas como foi mencionado anteriormente muitas vezes acontece que o aluno erra porque considera o máximo e o mínimo das frequências absolutas.

Enunciado:

Numa campanha de saúde oral junto das escolas, uma equipa do centro de saúde observou o número de caries de 31 alunos, tendo-se representado os dados através de um gráfico de barras.

Indica a amplitude do conjunto de dados.



- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ 7
- ☐ 10

Proposta de resolução:

A amplitude de dados é a diferença entre o número máximo e o número mínimo de cáries, ou seja, 7-3=4.

Exercício **E97k40_amplitude_caulefolhas_001** (ver código fonte na pág. 230):

Com este exercício pretende-se trabalhar a noção de amplitude de dados, estando estes num diagrama de caule-e-folhas. As variáveis parametrizadas são o número de condóminos e a idade de cada um deles. Este exercício é de fácil resolução uma vez que apenas se tem que extrair do diagrama os valores máximo e mínimo e com estes calcular a diferença.

Enunciado:

O administrador de um condomínio registou as idades de todos os condóminos no diagrama de caule folhas que se apresenta.

```
O ponto decimal está 1 dígito para a direita de |


0 | 47
1 | 456
2 | 57
3 | 11244555568
4 | 3
```

A amplitude de dados é :

- ☐ 39
- ☐ 40
- ☐ 43
- ☐ 38

Proposta de resolução:

A amplitude é igual à diferença entre a idade da pessoa mais velha e a idade da pessoa mais nova, ou seja 43-4=39.

Exercício **E97k40_amplitude_quartis_001** (ver código fonte na pág. 232):

Este exercício trabalha a noção de quartis e de amplitude interquartil. As variáveis parametrizadas consideradas foram a dimensão da amostra e cada elemento da mesma. Na parte da programação teve-se em consideração a dimensão da amostra ser par ou ímpar. Tendo presente essa dimensão da amostra foram utilizadas diferentes funções para o cálculo dos quartis e da amplitude interquartil, para a definição das respostas de escolha múltipla e para a resolução detalhada do problema. Este exercício tem um grau de resolução fácil pois apenas se tem que aplicar a definição de quartis e de amplitude interquartil. A construção destas diferentes respostas implicou, quer na parte do texto, quer na parte da programação, a utilização de funções específicas.

Enunciado:

Determina a amplitude interquartil do seguinte conjunto de dados:

$$\{15, 2, 11, 13, 12, 11, 4, 7, 7, 12\}$$

- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 4
- ☐ 13

Proposta de resolução:

A amplitude interquartil é igual à diferença entre o 3º e o 1º quartis ($Q_3 - Q_1$).

Então, para determinar a amplitude interquartil temos que seguir os seguintes passos:

1º Ordenar os dados por ordem crescente ou decrescente:

$$\{2, 4, 7, 7, 11, 11, 12, 12, 13, 15\}$$

2º Determinar a mediana da amostra: como neste conjunto há 10 elementos, que é um número par, então a mediana é 11, porque é igual à média dos dois valores centrais (5º e 6º), ou seja,

$$\tilde{x} = \frac{11 + 11}{2} = 11$$

3º Determinar o 1º quartil, que é 7, porque é a mediana dos dados que se encontram à esquerda da mediana.

4º Determinar o 3º quartil, que é 12, porque é a mediana dos dados que se encontram à direita da mediana.

5º Calcular a amplitude interquartil: $Q_3 - Q_1 = 12 - 7 = 5$

Exercício **E97k40_amplitude_interquartis_caulefolhas_001** (ver código fonte na pág. 235):

Este exercício trabalha a noção de amplitude interquartil. Os dados são apresentados num diagrama de caule-e-folhas. As variáveis parametrizadas foram o número de crianças e a idade, em meses, de cada criança. Em termos de programação foi definido o diagrama de caule-e-folhas. Na resposta detalhada consideraram-se as duas situações distintas referentes ao facto da amostra ser par ou ímpar. O exercício é de fácil resolução.

Enunciado:

Num determinado dia, no serviço de pediatria de um hospital, foram observadas crianças com idade inferior a três anos. O registo das idades, em meses, foi organizado através do diagrama de caule e folhas.

```
O ponto decimal está 1 dígito para a direita de |
0 | 1144
0 | 99
1 | 22
1 | 5779
2 | 01224
2 | 89
3 | 1224
3 | 566
```

A amplitude interquartil das idades das crianças observadas é:

- ☐ 19
- ☐ 20
- ☐ 8.5
- ☐ 35

Proposta de resolução:

A amplitude interquartil é igual à diferença entre o 3º e o 1º quartis $(Q_3 - Q_1)$.

Para determinar a amplitude interquartil temos que seguir os seguintes passos:

1º: Determinar a mediana da amostra: como neste conjunto há 26 elementos, que é um número par, então a mediana é 20.5, porque é igual à média dos dois valores centrais (13^o e 14^o), ou seja,

$$\tilde{x} = \frac{20+21}{2} = 20.5$$

2^o: Determinar o 1^o quartil, $Q_1 = 12$, porque é a mediana dos dados que se encontram à esquerda da mediana;

3^o: Determinar o 3^o quartil,$Q_3 = 31$, porque é a mediana dos dados que se encontram à direita da mediana;

4^o: calcular a amplitude interquartil: $Q_3 - Q_1 = 31 - 12 = 19$.

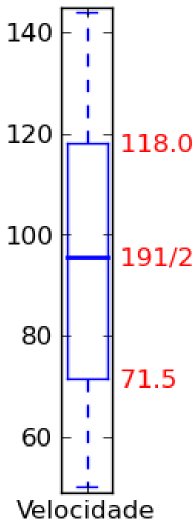
Exercício **E97k40_graficoextremos_002** (ver código fonte na pág. 152):

Com este exercício pretende-se analisar os dados relativos a um diagrama de extremos e quartis. As variáveis parametrizadas foram o número de automóveis e a velocidade, em Km/h, de cada automóvel. Na pergunta do problema a velocidade considerada pode corresponder ao valor do 1º Quartil ou ao valor do 3º Quartil. A particularidade deste exercício, em termos de programação, está na definição do diagrama de extremos e quartis. Na resposta detalhada consideraram-se as duas situações distintas referentes ao que é solicitado. O exercício é de fácil resolução.

Enunciado:

Numa autoestrada foi instalado um radar para controlar a velocidade (Km/h) dos automóveis.

Num dia foram controlados 140 automóveis e as velocidades registadas encontram-se representadas no seguinte diagrama de extremos e quartis.



Determina, aproximadamente, quantos dos automóveis controlados circulavam a uma velocidade superior ou igual a 118.0 Km/h.

- ☐ 35
- ☐ 105
- ☐ 70
- ☐ 94

Proposta de resolução:

A resposta é 35 automóveis.

Por análise do gráfico, 118.0 corresponde ao valor do 3º quartil (Q_3).

Entre o 3º quartil e o valor máximo da distribuição encontram-se 25% das observações, logo o resultado é $0.25 \times 140 = 35$.

Exercício **E97k40_graficoextremos_001** (ver código fonte na pág. 142):

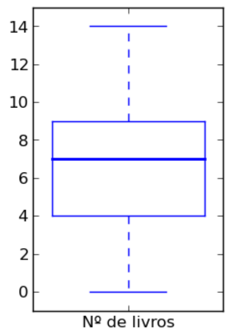
Com este exercício pretende-se identificar o diagrama de extremos e quartis que corresponde à amostra dada. As variáveis parametrizadas foram o número de alunos e o número de aventuras que cada aluno possui. A particularidade deste exercício, em termos de programação, está na definição do diagrama de extremos e quartis. Na resposta detalhada teve-se em conta a possibilidade da amostra ser par ou ímpar. O exercício tem um grau de dificuldade médio.

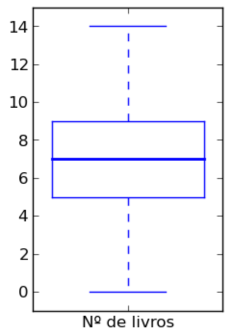
Enunciado:

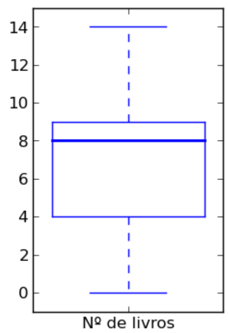
Um grupo de alunos do 8º ano de uma escola foi questionado acerca do número de livros de aventuras que possuem. As respostas obtidas são

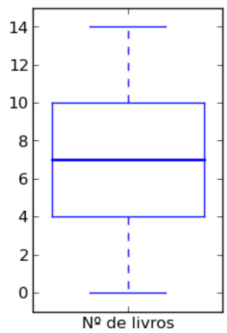
$$\{7, 9, 2, 14, 7, 14, 6, 8, 7, 5, 2, 7, 14, 12, 1, 6, 4, 0\}$$

Indica quais dos seguintes diagramas de extremos e quartis pode representar o número de livros de aventuras do grupo de alunos do 8ºano.

☐ 

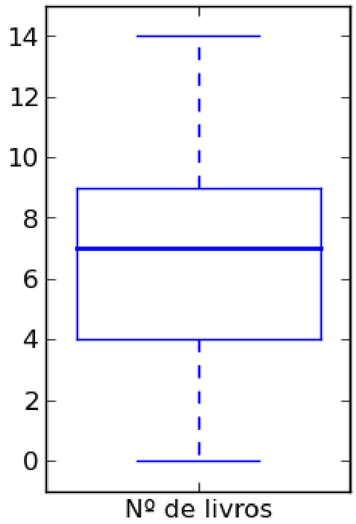
☐ 

☐ 

☐ 

Proposta de resolução:

O gráfico correto é



Para representar um diagrama de extremos e quartis necessitamos de determinar o mínimo, o máximo, os quartis (Q_1 e Q_3) e a mediana.

Para tal começamos por ordenar o conjunto da dados:

$$\{0, 1, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 12, 14, 14, 14\}$$

O mínimo é 0 e o máximo é 14.

A turma tem 18 alunos que é um número par. Então,a mediana é 7, porque é igual à média do número de livros que os alunos, que ocupam a 9ª posição e 10ª posição, têm. Ou seja,

$$\tilde{x} = \frac{7+7}{2} = 7$$

O 1º quartil é $Q_1 = 4$ porque é a mediana dos valores que se encontram à esquerda da mediana.

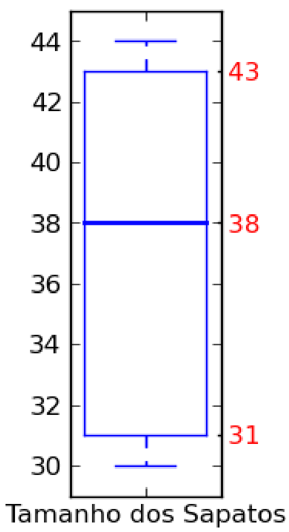
O 3º quartil é $Q_3 = 9$ porque é a mediana dos valores que se encontram à direita da mediana.

Exercício **E97k40_graficoextremos_amplitudeinterquartil_001** (ver código fonte na pág. 239):

Com este exercício pretende-se trabalhar a noção de amplitude interquartil, onde os dados estão apresentados num diagrama de extremos e quartis. As variáveis parametrizadas são o número de alunos e o tamanho de sapatos de cada aluno. Este exercício é de fácil resolução uma vez que apenas se tem que extrair do diagrama os valores do 1º quartil e do 3º quartil e com estes calcular a diferença. A particularidade deste exercício, em termos de programação, está na definição do diagrama de extremos e quartis.

Enunciado:

O diagrama de extremos e quartis representado na figura seguinte refere-se à distribuição dos tamanhos de sapatos dos 31 alunos de uma escola.



A amplitude interquartil é aproximadamente:

- ☐ 12
- ☐ 13
- ☐ 7
- ☐ 14

Proposta de resolução:

A amplitude interquartil é igual à diferença entre os 3º e 1º quartis: $Q_3 - Q_1 = 43 - 31 = 12$.

3.3 SIACUA

No âmbito da investigação & desenvolvimento na Universidade de Aveiro projetou-se um Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador, que permite realizar cursos, nos quais constam índices com informações e exercícios sobre o assunto que se pretenda desenvolver, bem como um sistema de aprendizagem aberto, disponibilizando uma área de estudo autónoma ao utilizador, no qual se podem constituir questões tipo verdadeiro/falso (utilizadas por exemplo no PmatE, Projeto Matemática Ensino) e questões de escolha múltipla (usadas nomeadamente no Projeto MEGUA, *Mathematics Exercise Generator, University* of Aveiro).

O referido sistema irá servir de suporte aos exercícios idealizados no âmbito da componente prática desta dissertação, com a possibilidade de disponibilizar aos alunos e professores um mapa concetual do assunto em estudo, permitindo a realização de atualizações constantes e recolha de informação sobre cada evidência de conhecimento adquirido. Os exercícios criados serão alojados no supramencionado sistema, no curso Matemática - Básico que se pode consultar no endereço:

http://siacua.web.ua.pt/

Cada exercício é enviado para o SIACUA seguindo os seguintes procedimentos:

1. no *"workseet"* insere-se numa nova célula onde se escreve a seguinte instrução:

```
meg.siacua(exname="E97k40_aaaa_001",ekeys=[0,1,2,14,18,25,30,33,40,50], send-
post=true,course="matbas",usernamesiacua="bbbb")
```

2. imediatamente antes do %problem é colocada a informação seguinte:

   SIACUAstart

   level=1

   slip=0.2

   guess=0.25

   discr=0.3

   concepts = [(*"código SIACUA"*, peso)]

   SIACUAend

Nota: Os códigos SIACUA atribuídos ao tema OTD são os seguintes:

OTD (5400):

- Representação de dados (5410):
  - Tabelas de frequências (5411);

    - Gráficos (5412);
  - Medidas de localização (5420):
    - Média (5421);
    - Moda (5422);
    - Mediana e quartis (5423);
  - Medidas de dispersão (5430):
    - Amplitude (5431);

3. voltar à célula criada e fazer *shift+enter*

Após a realização destas etapas e de forma automática os exercícios gerados ficam disponíveis no SIACUA.

A seleção das chaves (*ekeys*) deve ser realizada contemplando diferentes parâmetros atribuídos às variáveis presentes em cada exercício e desta forma cada chave gera um exercício diferente, permitindo abranger a maioria dos casos possíveis.

Neste momento, no domínio de OTD, encontram-se disponíveis *online*, na supramencionada plataforma, o conjunto de exercícios parametrizados de escolha múltipla, já apresentados na secção 3.2 do presente capítulo. Estes exercícios estão vocacionados, particularmente, para alunos do 2º e 3º ciclo, sendo apresentadas as respetivas propostas de resolução. Atente-se, a título de exemplo, as ilustrações 3.1 e 3.2 do ecrã que plasmam os códigos referentes aos temas a serem estudados:

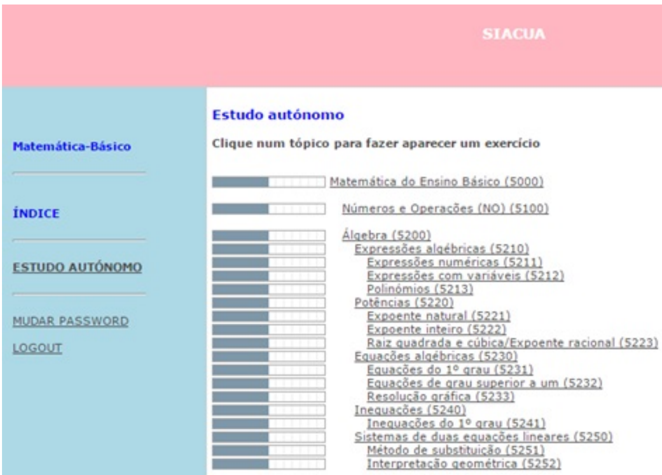


Figura 3.1: Códigos SIACUA - 1

e

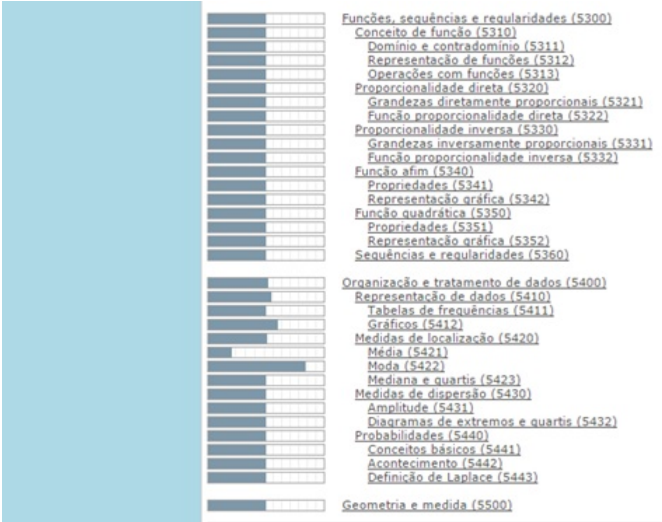


Figura 3.2: Códigos SIACUA - 2

Na ilustração 3.3 pode-se observar o ecrã de um exercício desenvolvido na parte prática desta dissertação.

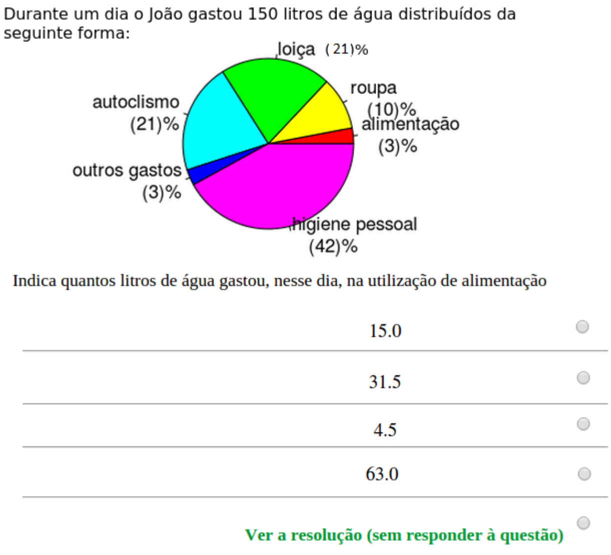


Figura 3.3: Exercício do SIACUA

Capítulo 4

Considerações Finais, Limitações e Sugestões

A tecnologia tem provocado mudanças radicais não só nos contextos sociais atuais, como, também, na transformação da educação, implicando novas adaptações quer da sociedade em geral, quer, em particular, dos agentes que operam nos contextos educativos, fundamentalmente, professores e alunos.

Assim, por um lado temos, cada vez mais, professores a desenvolver estratégias pedagógica-educativas personalizadas, centradas e alicerçadas em recursos digitais, tentando suscitar uma atratividade maior nos jovens para as questões da aprendizagem. Obviamente que esta nova realidade exige que os professores se capacitem de novos saberes e conhecimentos, mormente no que concerne a aspetos tecnológicos, recurso a plataformas e conceção de recursos digitais, mas, sobretudo, terem a habilidade de saber desenvolvê-los e utilizá-los na sua prática pedagógica diária. Por outro lado temos o aluno como participante ativo e influenciado por estas mudanças contínuas, que acima de tudo deverão fomentar o seu discernimento face à sociedade em que vivem, tornando-se mais críticos e autónomos na procura de soluções de problemas, em contextos muitas vezes imprevisíveis e dinâmicos.

Neste sentido é essencial a intercessão feita através das tecnologias digitais e as práticas didático-pedagógicas, como apoio à atuação do professor no contexto educativo, ampliando o número de projetos desenvolvidos com as novas tecnologias, criando e reforçando o interesse nos alunos em aprender.

O estudo desenvolvido no âmbito desta dissertação insere-se no espaço destas premissas, isto é, salientou-se a importância da conceção dos recursos digitais, da utilização das plataformas como meios difusores desses recursos e do conhecimento junto dos alunos. De facto ao longo de todo o trabalho, para além de se ter consubstanciado esta importância das novas tecnologias nos contextos educativos, deu-se um contributo empírico para o aumento dos recursos digitais, neste caso na área da Estatística, mais especificamente no domínio de OTD, ao terem sido criados exercícios parametrizados que englobaram praticamente todos os conteúdos previstos no Programa de Matemática de 2013 do 2º e 3º ciclos do Ensino Básico.

Neste âmbito conseguiu-se concretizar, também, um dos objetivos norteados para esta dissertação, nomeadamente de criar de forma inovadora e criativa exercícios modelando de forma atrativa a apresentação gráfica de cada exercício nomeadamente gráficos de barras, diagrama de caule-e-folhas, gráficos circulares, tabelas de frequência, entre outros. Sempre que oportuno os exercícios retratam situações reais, da vida quotidiana.

Esta dissertação permitiu, também, destacar o potencial revelado pelo *software* MEGUA, associado à linguagem *Python* e à plataforma SIACUA, enquanto fontes e repositórios para a conceção e partilha *online* de recursos educativos digitais, que permite aos professores e alunos da disciplina de Matemática, de vários níveis de ensino, utilizarem os mesmos em contexto educativo de forma autónoma e intemporal.

Realce-se o facto de ao longo de toda a dissertação se ter recorrido ao *Geogebra*, *software* de geometria que permite desenvolver gráficos de forma dinâmica, bem como o *software* de folha de cálculo *Microsoft Excel*, que admite efetuar análises através de tabelas dinâmicas, possibilitando formatar e reorganizar os dados de forma a poderem ser interpretados de forma mais acessível, objetiva e clara.

Depreende-se, ainda, do trabalho aprofundado realizado, que o professor é um elemento fulcral no desenvolvimento de recursos que melhor se adequam ao contexto(s) educativo(s) pretendido(s), devendo saber tirar partido das ferramentas tecnológicas atualmente disponíveis na Internet, potenciando esses recursos em prol de uma melhor aprendizagem dos alunos, e da possível utilidade na prática letiva do dia-a-dia.

Contudo para a realização deste trabalho sentiram-se algumas limitações, sendo que parte delas se transformaram em verdadeiros desafios, nomeadamente ao nível da programação na linguagem *Python*. Obviamente que ao recorrer-se a diversos tipos de tecnologias exigiu um conhecimento e adaptação, que em determinados casos foi feito de forma mais morosa, suscitando uma maior exigência em termos de compreensão do funcionamento das mesmas ao nível da conceção de exercícios, mas que ao nível da utilização se tornam bastante acessíveis e "amigáveis".

No término desta dissertação pode-se observar que ao trabalhar com os recursos digitais para efeitos de aprendizagem, como suportes à atividade docente de maneira criativa e inovadora, entra-se numa espiral de opções extremamente ricas e profícuas ao nível da transmissão de saberes e conhecimentos em várias áreas e domínios, no presente estudo criaram-se exercícios para o 5º até ao 8º ano, no domínio da OTD, pelo que se sugere que este trabalho possa continuar, para outros anos de escolaridade, e, caso seja possível, criar outro tipo de exercícios, por exemplo de resposta aberta, bem como no âmbito de outros domínios da Matemática e da Estatística.

Bibliografia

Biehler, R. (1989), Educational perspectives on exploratory data analysis, In R. Morris (Ed.) *Studies in mathematics education: The teaching of statistics*, 7, pp. 185-202.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. (2013), *Caderno de Apoio ao 3º Ciclo - Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*, Ministério de Educação e Ciência, DGIDC.

Branco, J. (2000), Estatística no secundário: O ensino e seus problemas, *Ensino e aprendizagem da Estatística*, pp. 11-30.

Campos, F. (2012), *Os professores como autores e editores de recursos educativos digitais?: uma investigação-ação na escola*, Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. (2006), Olhares sobre a Educação Estatística em Portugal, *Anais do SIPEMAT*, Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação–Centro de Educação–Universidade Federal de Pernambuco.

Cobb, G., Moore D. (1997), Mathematics, statistics and teaching, *American Mathematical Monthly*, 104(9), pp. 801-823.

Costa, B., Rodrigues, E. (2014), *Novo Espaço–Matemática A 10º Ano, parte 2*, Porto Editora.

Cruz, P., Oliveira, P., Seabra, D. (2011), Arquivo de Exercícios Parametrizados, *1ª Conferência Ibérica de Inovação em Educação com TIC (ieTIC2011)*, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança.

Dias, P. (2013), Inovação pedagógica para a sustentabilidade da educação aberta e em rede, *Educação, Formação & Tecnologias*, 6(2), pp. 4-14.

Figueiredo, A. (2001), Novos media e nova aprendizagem, *Novo conhecimento, nova aprendizagem*, pp. 71-81.

Gago, M., Amaral, J., Grácio, S., Rodrigues, M., Fernandes, L., Ruivo, B., Ambrósio, T. (1994), *Prospectiva do ensino superior em Portugal*, Lisboa: Ministério da Educação.

Gal, I. (2002), Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities, *International Statistical Review*, 70(1), pp. 1-25.

Harley, D., Henke, J., Lawrence, S., Miller, I., Perciali, I., Nasatir, D. (2006), *Use and Users of Digital Resources: A Focus on Undergraduate Education in the Humanities and Social Sciences*, UC Berkeley: Center for Studies in Higher Education.

Lévy, P. (1999), *Cibercultura*, Ed. 34, São Paulo.

Lopes, C. (2008), O ensino de probabilidade e estatística na escola básica nas dimensões do currículo e da prática pedagógica, [Online; Consult. 24-outubro-2014],

Disponível em `http://www.iberomat.uji.es/carpeta/posters/148_celi_espasandin_lopes.doc`.

Madison, B., Steen, L. (Eds) (2003), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges*, Woodrow Wilson Natl Foundation.

Martins, G. (2005), *Introdução Probabilidade e Estatística*, Sociedade Portuguesa de Estatística.

Martins, G., Monteiro, C., Viana, J., Turkman, M. (1997), *Estatística*, Ministério de Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Martins, G., Ponte, J. (2010), *Organização e tratamento de dados*, Ministério de Educação, DGIDC.

Ministério da Educação (2007), *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: Ministério de Educação, DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (2012), *Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*, Lisboa: Ministério de Educação e Ciência, DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (2013), *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: Ministério de Educação e Ciência, DGIDC.

Miranda, E. (2007), Ensino superior: novos conceitos em novos contextos, *Tékhne-Revista de Estudos Politécnicos*, (8), pp. 161-182.

Murteira, B., Ribeiro, C., Silva, J., Pimenta, C. (2007), *Introdução à estatística*, McGraw-Hill.

Murteira, B., Black, G. (1983), *Estatística Descritiva*, McGraw-Hill.

Nadal, E. (1998), Responsabilidade Educativa, Sensibilidade e Cidadania, Debates Presidência da República, *A Educação e o Futuro*, pp. 93-99.

NCTM (2008), *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, APM.

Nunes, A. (2008), *Ensino da estocástica no 6. º ano de escolaridade: Opções metodológicas e dificuldades sentidas pelos professores*, Universidade do Minho.

Palhares, P. (2004), *Elementos de Matemática para Professores do 1º ciclo*, Lisboa: Lidel.

Pinto, A. (2001), Factores relevantes na avaliação escolar por perguntas de escolha múltipla, *Psicologia, Educação e Cultura*, 5(1), pp. 23-44.

Ponte, J. (2003), O ensino da matemática em portugal: Uma prioridade educativa?, *Seminário "O Ensino da Matemática: Situação e Perspetivas.*

Prensky, M. (2001), Digital natives, digital immigrants part 1, *On the horizon*, 9 (5), pp. 1-6.

Ramos, J., Teodoro, V., Ferreira, F. (2011), *Recursos educativos digitais: reflexões sobre a prática*, Cadernos SACAUSEF VII, Lisboa: Ministério da Educação.

Recker, M., Dorward, J., Dawson, D., Mao, X., Liu, Y., Palmer, B., ... & Park, J. (2005), Teaching, designing, and sharing: A context for learning objects, *Interdisciplinary Journal of E-Learning and Learning Objects*, 1(1), pp. 197-216.

Reis, E. (2000), *Estatística Descritiva*, Edições Sílabo.

Shaughnessy, J. (2007), Research on statistics learning and reasoning, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 957-1009.

Silva, P. (2013), Objetos digitais - instrumento de trabalho, *I Encontro Internacional da Casa das Ciências*, Lisboa.

Stein, W. (2012), *Sage Mathematics Software (versão 5.8)*, http://www.sagemath.org.

Valente, M. (1998), Aprender a Pensar, Debates Presidência da República, *A Educação e o Futuro*, pp. 101-106.

Vieira, F., Moreira, M. (2011), *Supervisão e avaliação do desempenho docente: Para uma abordagem de orientação transformadora*, Cadernos do Conselho Científico para a Avaliação de Professores (1), Lisboa: Ministério da Educação.

Zuin, A. (2010), O plano nacional de educação e as tecnologias da informação e comunicação, *Educação & Sociedade*, 31(112), pp. 961-980.

Apêndice A

Código Fonte

As secções que se seguem contém o código fonte que dá origem às concretizações descritas na secção 3.2.2.

A.1 Variáveis estatísticas

E97k40_variaveis_001

%SUMMARY Variáveis estatísticas

```
Este exercício pretende classificar variáveis



   SIACUAstart
level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5410,1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Das seguintes variáveis indica a que é casvariavel@c{"quantitativa
discreta","quantitativa contínua","qualitativa"}
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> vresposta </choice>
   <choice> errada1 </choice>
   <choice> errada2 </choice>
   <choice> errada3 </choice>
</multiplechoice>

   A resposta correta é "vresposta" porque
   <showone
casvariavel>
   <thisone> só pode tomar um número finito ou uma infinidade
numerável de valores. "É contável".</thisone>
   <thisone> pode tomar qualquer
valor numérico, compreendido no seu intervalo de variação. "É necessário um
instrumento de medição".</thisone>
   <thisone> é uma qualidade, uma
caraterística ou uma categoria, que pode assumir várias modalidades que não se
podem medir.</thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97k40_variaveis_001(Exercise):

        qdiscreta = [
            u"Numero de irmaos",
            u"Numero de filhos",
            u"Numero de pessoas do agregado familiar",
            u"Numero de salas de uma escola",
            u"Numero de apartamentos de um predio",
            u"Numero de chamadas telefonicas efetuadas durante um dia",
            u"Numero de vezes que escova os dentes por dia",
            u"Numero de idas ao dentista por ano",
            u"Numero de copos de agua ingeridos por dia",
```

```
        u"Numero de faltas dadas a uma disciplina",
    ]

    qcontinua = [
        u"Peso",
        u"Altura",
        u"Temperatura de uma sala",
        u"Tempo dispendido diariamente a ver televisao",
        u"Tempo de duracao de uma escovagem de dentes",
        u"Distancia de casa a escola",
        u"Consumo diario de eletricidade",
        u"Consumo diario de agua",
        u"Peso medio de carne consumida diariamente",
        u"Tempo de duracao de uma chamada telefonica"

    ]

    qualitativa= [
        u"Programa de televisao preferido",
        u"Genero",
        u"Cor dos olhos",
        u"Disciplina preferida",
        u"Desporto preferido",
        u"Estado civil",
        u"Nacionalidade",
        u"Habilitacoes literarias",
        u"Profissao",
        u"Meio de deslocacao para a escola"
    ]

    def make_random(s):

        s.casvariavel=ur.iunif(0,2)
```

```
def solve(s):

    NUMFRASES = 10

    if s.casvariavel==0:
        s.vresposta = s.qdiscreta[ur.iunif(0,NUMFRASES-1)]
        #Opcoes Erradas
        primeira = ur.iunif(0,NUMFRASES-1)
        s.errada1 = s.qcontinua[primeira]
        s.errada2 = s.qcontinua[ur.iunif_nonset(0,NUMFRASES-1,[
            ↪ primeira])]
        s.errada3 = s.qualitativa[ur.iunif(0,NUMFRASES-1)]
    elif s.casvariavel==1:
        s.vresposta = s.qcontinua[ur.iunif(0,NUMFRASES-1)]
        #Opcoes Erradas
        primeira = ur.iunif(0,NUMFRASES-1)
        s.errada1 = s.qdiscreta[primeira]
        s.errada2 = s.qdiscreta[ur.iunif_nonset(0,NUMFRASES-1,[
            ↪ primeira])]
        s.errada3 = s.qualitativa[ur.iunif(0,NUMFRASES-1)]

    else:
        s.vresposta = s.qualitativa[ur.iunif(0,NUMFRASES-1)]
        #Opcoes Erradas
        primeira = ur.iunif(0,NUMFRASES-1)
        s.errada1 = s.qdiscreta[primeira]
        s.errada2 = s.qdiscreta[ur.iunif_nonset(0,NUMFRASES-1,[
            ↪ primeira])]
        s.errada3 = s.qcontinua[ur.iunif(0,NUMFRASES-1)]
```

A.2 Organização e apresentação de dados

A.2.1 Tabela de frequências

E97k40_frequencia_relativaversao2_001

%SUMMARY Representação de dados; tabelas de frequências

Este exercício pretende calcular a frequência relativa (em percentagem).

```
SIACUAstart
level=1
slip=0.2
guess=0.25
discr=0.3
concepts = [(5411,1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

Na turma do João, no início do ano letivo, a professora de Português perguntou quantos livros cada um dos alunos tinha lido nas férias. Na tabela seguinte encontram-se as respostas dadas pelos alunos:

```
       <table border="1">
<tr align="center"> <td> Número de livros lidos </td> <td> Número de alunos
</td> </tr>
   <tr align="center"> <td> $v1$ </td> <td> $fa1$ </td> </tr>
<tr align="center"> <td> $v2$ </td> <td> $fa2$ </td> </tr>
   <tr
align="center"> <td> $v3$</td> <td> $fa3$ </td> </tr>
   <tr align="center">
<td> $v4$ </td> <td> $fa4$ </td> </tr>
   <tr align="center"> <td> $v5$ </td>
<td> $fa5$ </td> </tr>
   </table>
```

```
   Indica a percentagem de alunos que
leu pelo menos caslivros@c{"2 livros","3 livros"}.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>



   <showone controlo>
   <thisone>Ler
pelo menos 2 livros é o mesmo que ler 2 livros ou mais. Para calcular a
percentagem dividimos o nº de alunos que leram no mínimo 2 livros pelo total de
alunos e de seguida multiplicamos por 100, ou seja, $$\frac{fa3+fa4+fa5}{fa1+fa2
+fa3+fa4+fa5}\times100=\frac{soma1}{total1}\times100=result1\times100=vresposta\
%$$.</thisone># pelos menos 2: 2+3+4 livros (o mínimo de livros lidos é 1)
<thisone>Ler pelo menos 3 livros é o mesmo que ler 3 livros ou mais. Para
calcular a percentagem dividimos o nº de alunos que leram no mínimo 3 livros
pelo total de alunos e de seguida multiplicamos por 100, ou seja, $$\frac{fa4+fa
5}{fa1+fa2+fa3+fa4+fa5}\times100=\frac{soma2}{total1}\times100=result2\times100=
vresposta\%$$.</thisone># pelo menos 3: 3+4 livros (o mínimo de livros lidos é
1)
   <thisone> Ler pelo menos 2 livros é o mesmo que ler 2 livros ou mais. Para
calcular a percentagem dividimos o nº de alunos que leram no mínimo 2 livros
pelo total de alunos e de seguida multiplicamos por 100, ou seja,$$\frac{fa2+fa3
+fa4+fa5}{fa1+fa2+fa3+fa4+fa5}\times100=\frac{soma3}{total1}\times100=result3\ti
mes100=vresposta\%$$.</thisone>
   <thisone> Ler pelo menos 3 livros é o mesmo
que ler 3 livros ou mais. Para calcular a percentagem dividimos o nº de alunos
```

que leram no mínimo 3 livros pelo total de alunos e de seguida multiplicamos por 100, ou seja,$$\frac{fa3+fa4+fa5}{fa1+fa2+fa3+fa4+fa5}\times100=\frac{soma4}{total1}\times100=result4\times100=vresposta\%$$.</thisone>

</showone>

Programação

```
class E97k40_frequencia_relativaversao2_001(Exercise):

    #http://www.sagemath.org/doc/reference/combinat/sage/combinat/
        ↪ partition.html

    def make_random(s):
        partition_element=Partitions(20,length=5).random_element()
        lista=list(partition_element)
        shuffle(lista)
        print(lista)
        s.v1=ur.iunif(0,1)
        s.v2=s.v1+1
        s.v3=s.v2+1
        s.v4=s.v3+1
        s.v5=s.v4+1

        s.fa1 = lista[0]
        s.fa2 = lista[1]
        s.fa3 = lista[2]
        s.fa4 = lista[3]
        s.fa5= lista[4]
        s.total1=s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4+s.fa5
        s.soma1=s.fa3+s.fa4+s.fa5
        s.soma2=s.fa4+s.fa5
        s.soma3=s.fa2+s.fa3+s.fa4+s.fa5
        s.soma4=s.fa3+s.fa4+s.fa5
        s.result1=round((s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1),2)
```

```
        s.result2=round((s.fa4+s.fa5)/(s.total1),2)
        s.result3=round((s.fa2+s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1),2)
        s.result4=round((s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1),2)
        s.caslivros=ur.iunif(0,1)
        s.controlo=2*s.v1+s.caslivros #pode tomar os valores 0,1,2,3

    def solve(s):
        if s.controlo==0:

            s.vresposta=(s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1)*100
            s.errada1 = (s.fa3)/(s.total1)*100
            if s.errada1==(s.fa1+s.fa2)/(s.total1)*100:
                s.errada2=(s.fa4+s.fa5)/(s.total1)*100
            else:
                s.errada2 = (s.fa1+s.fa2)/(s.total1)*100
            s.errada3 =(s.fa1+s.fa2+s.fa3)/(s.total1)*100
        elif s.controlo==1:

            s.vresposta =(s.fa4+s.fa5)/(s.total1)*100
            s.errada1 = (s.fa4)/(s.total1)*100
            if s.vresposta==((s.fa1+s.fa2+s.fa3)/(s.total1)*100):
                s.errada2 = (s.fa1+s.fa2)/(s.total1)*100
            else:
                s.errada2 = (s.fa1+s.fa2+s.fa3)/(s.total1)*100
            s.errada3 =(s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4)/(s.total1)*100
        elif s.controlo==2:

            s.vresposta =(s.fa2+s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1)*100
            s.errada1 = (s.fa1)/(s.total1)*100
            s.errada2 = (s.fa1+s.fa2)/(s.total1)*100
            if s.errada1==(s.fa2)/(s.total1)*100:
                s.errada3 =(s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1)*100
            else:
```

```
                    s.errada3=(s.fa2)/(s.total1)*100
            else:

                s.vresposta =(s.fa3+s.fa4+s.fa5)/(s.total1)*100
                s.errada1 = (s.fa3)/(s.total1)*100
                s.errada2 = (s.fa1+s.fa2)/(s.total1)*100
                s.errada3=(s.fa1+s.fa2+s.fa3)/(s.total1)*100
```

A.2.2 Gráfico de barras e tabela de frequências

E97k40_grafico_tabela_001

%SUMMARY Representação de dados; Gráficos de barras e tabelas de frequências

```
Este exercício pretende analisar uma tabela e o respetivo gráfico
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5411,0.5),(5412,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Numa escola com $total1$ alunos, fez-se um estudo sobre o número de
vezes que, em média, as raparigas e os rapazes da escola iam ao cinema por mês.
Qual dos gráficos seguintes representa os dados da tabela?

   <center>
<table border="1">
       <tr>
            <th rowspan=2></th>
            <th
colspan=3 rowspan=1> Nº de idas ao cinema por mês</th>
       </tr>
```

```
       <tr>
<th> 1 vez</th>
           <th> 2 vezes</th>
           <th> 3 vezes</th>
</tr>
       <tr>
           <th> rapazes</th>
           <th> fa1</th>
<th> fa2</th>
           <th> fa3</th>
      </tr>
      <tr>
           <th>
raparigas</th>
           <th> fa4</th>
           <th> fa5</th>
           <th>
fa6</th>
      </tr>
   </table>
   </center>
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> fig1 </choice>
   <choice> fig2 </choice>
   <choice> fig3 </choice>
   <choice> fig4 </choice>
</multiplechoice>

   O gráfico que representa os dados da tabela está abaixo
porque é neste que as frequências absolutas são iguais na tabela e no gráfico.
<center>
```

```
  fig1
</center>
```

Programação

```
class E97k40_grafico_tabela_001(Exercise):



    def make_random(s):

        s.fa1 = ur.iunif(150,200)
        s.fa2 = ur.iunif(50,100)
        s.fa3 = ur.iunif(100,150)
        s.fa4 = ur.iunif(150,200)
        s.fa5 = ur.iunif(100,150)
        s.fa6 = ur.iunif(0,25)
        s.total1=s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4+s.fa5+s.fa6

        s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.
            ↪ fa5,s.fa6,u""), "fig1", dimx=10, dimy=10)
        s.fig2 = s.sage_graphic( s.barras(s.fa4,s.fa5,s.fa6,s.fa1,s.
            ↪ fa2,s.fa3,u""), "fig2", dimx=10, dimy=10) #baralhar os
            ↪  dados
        s.fig3 = s.sage_graphic( s.barras(s.fa2,s.fa1,s.fa3,s.fa5,s.
            ↪ fa4,s.fa6,u""), "fig3", dimx=10, dimy=10) #baralhar os
            ↪  dados
        s.fig4 = s.sage_graphic( s.barras(s.fa1,s.fa3,s.fa2,s.fa4,s.
            ↪ fa6,s.fa5, u""), "fig4", dimx=10, dimy=10) #baralhar
            ↪ os dados

    def solve(s):
        pass #nada a fazer
```

```
def barras(s,fa11,fa12,fa21,fa22,fa31,fa32,titulo) :
    import numpy as np
    import matplotlib.pyplot as plt

    N = 3

    ind = np.arange(N)  # the x locations for the groups
    width = 0.35        # the width of the bars
    fig, ax = plt.subplots()

    #box = dict(facecolor='yellow', pad=5, alpha=0.2)
    #ax.set_ylabel(u'Numero de alunos',bbox=box)

    rapazes = (fa11,fa12,fa21)
    rects1 = ax.bar(ind, rapazes, width, color='r')

    raparigas = (fa22,fa31,fa32)
    rects2 = ax.bar(ind+width, raparigas, width, color='y')

    # add some
    ax.set_xlabel(u'Numero de idas ao cinema')
    ax.set_ylabel(u'Numero de alunos')
    ax.yaxis.set_label_coords(-0.11, 0.5) #http://matplotlib.org
        ↪ /faq/howto_faq.html
    ax.set_title(titulo)
    ax.set_xticks(ind+width)
    ax.set_xticklabels( ('1', '2', '3') )

    ax.legend( (rects1[0], rects2[0]), ('Rapazes', 'Raparigas')
        ↪ )

    def autolabel(rects):
```

```
        # attach some text labels
        for rect in rects:
            height = rect.get_height()
            ax.text(rect.get_x()+rect.get_width()/2., 1.02*
               ↪ height, '%d'%int(height),
                    ha='center', va='bottom')

    autolabel(rects1)
    autolabel(rects2)

    return plt
```

A.2.3 Gráfico circular

E97k40_graficocircularversao2_001

%SUMMARY Representação de dados; Gráfico circular

```
Este exercício pretende relacionar a informação de um gráfico circular
com a frequência absoluta.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5412,1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Durante um dia o João gastou nn litros de água distribuídos da seguinte
forma:

   <center>
   queijo1
```

```
   </center>



   Indica quantos litros
de água gastou, nesse dia, na utilização cascoisas1@c{"da higiene pessoal","da
loiça","do autoclismo","da roupa","de alimentação","de outros gastos"}
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

    O joão gastou
    <showone  cascoisas1>
<thisone> v6% de água na higiene pessoal o que corresponde a  v6% de nn litros
de água, ou seja, $a1\times nn=vresposta$ litros de água.</thisone>
<thisone> v3% de água na loiça o que corresponde a v3% de nn litros de água, ou
seja, $v3\times0.01\times nn=vresposta$ litros de água.</thisone>
    <thisone>
v4% de água no autoclismo o que corresponde a v6% de nn litros de água, ou seja,
$v4\times0.01\times nn=vresposta$ litros de água.</thisone>
    <thisone> v2% de
água na roupa o que corresponde a v2% de nn litros de água, ou seja,
$v2\times0.01\times nn=vresposta$ litros de água.</thisone>
    <thisone> v1% de
água na alimentação o que corresponde a v1% de nn litros de água, ou seja,
$v1\times0.01\times nn=vresposta$ litros de água.</thisone>
    <thisone> v5% de
água em outros gastos o que corresponde a v5% de nn litros de água, ou seja,
$v5\times0.01\times nn=vresposta$ litros de água.</thisone>
```

</showone>

Programação

```
class E97k40_graficocircularversao2_001(Exercise):



    def make_random(s):
        s.v1= ur.iunif(1,5) #percentagem de alimentacao
        s.v2= ur.iunif(10,15) #percentagem de roupa
        s.v3= ur.iunif(20,25) #%loica
        s.v4= s.v3 #%autoclismo
        s.v5= s.v1 #%outros gastos
        s.v6= 100-(s.v1+s.v2+s.v3+s.v4+s.v5) #%higiene pessoal
        s.a1= round(s.v6/100,2)
        const = ur.iunif(1,4)
        s.nn= 50*const
        s.cascoisas1=ur.iunif(0,5)

        s.valueslist = [
            ['alimentacao',s.v1],
            ['roupa',s.v2],
            ['loica',s.v3],
            ['autoclismo',s.v4],
            ['outros gastos',s.v5],
            ['higiene pessoal',s.v6]
        ]

        queijo_graphic = s.queijo(omitir=3)
        s.queijo1      = s.r_graphic( queijo_graphic, "queijo1", 10,
            ↪ 10) #10cm



    def solve(s):
```

```
        if s.cascoisas1==0:
            s.vresposta = round(s.a1*s.nn,1)
            s.errada1 = round(s.v1*0.01*s.nn,1)
            s.errada2 = round(s.v2*0.01*s.nn,1)
            s.errada3= round(s.v3*0.01*s.nn,1)
        elif s.cascoisas1==1:
            s.vresposta = round(s.v3*0.01*s.nn,1)
            s.errada1 = round(s.v1*0.01*s.nn,1)
            s.errada2 = round(s.v2*0.01*s.nn,1)
            s.errada3= round(s.v6*0.01*s.nn,1)
        elif s.cascoisas1==2:
            s.vresposta = round(s.v3*0.01*s.nn,1)
            s.errada1 = round(s.v1*0.01*s.nn,1)
            s.errada2 = round(s.v2*0.01*s.nn,1)
            s.errada3= round(s.v6*0.01*s.nn,1)
        elif s.cascoisas1==3:
            s.vresposta = round(s.v2*0.01*s.nn,1)
            s.errada1 = round(s.v1*0.01*s.nn,1)
            s.errada2 = round(s.v3*0.01*s.nn,1)
            s.errada3= round(s.v6*0.01*s.nn,1)
        elif s.cascoisas1==4:
            s.vresposta = round(s.v1*0.01*s.nn,1)
            s.errada1 = round(s.v2*0.01*s.nn,1)
            s.errada2 = round(s.v3*0.01*s.nn,1)
            s.errada3= round(s.v6*0.01*s.nn,1)
        elif s.cascoisas1==5:
            s.vresposta = round(s.v5*0.01*s.nn,1)
            s.errada1 = round(s.v3*0.01*s.nn,1)
            s.errada2 = round(s.v2*0.01*s.nn,1)
            s.errada3= round(s.v6*0.01*s.nn,1)


    def queijo(s,omitir):
```

```
# Pie Chart with Percentages
slices = r"slices <- c({0},{1},{2},{3},{4},{5})".format(s.v1
    ↪ ,s.v2,s.v3,s.v4,s.v5,s.v6)
labelslist = [ "{0}\n  ({1})%".format(v[0],v[1]) for v in s
    ↪ .valueslist ]
labelslist[omitir-1] = s.valueslist[omitir-1][0] #omite a
    ↪ percentagem, mostra so legenda

labels = r"lbls <- c(" + ', '.join(['"{0}"'.format(l) for
    ↪ l in labelslist]) + ")"

cmd = r'pie(slices,labels=lbls,col=rainbow(length(lbls)),
    ↪ main="Gastos de agua")'

txt = '\n'.join([slices,labels,cmd])
#print txt

return txt
```

A.2.4 Gráficos circular e de barras

E97k40_graficocircular_barras_001

%SUMMARY Representação de dados; gráficos circular e de barras

```
Este exercício pretende relacionar a informação de um gráfico
circular com gráficos de barras.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5412,1)]
```

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

O gráfico circular que se segue fornece informação sobre as zonas do corpo onde as lesões provocadas por mochilas são mais frequentes.

<center>

fig1

</center>

A Marta e três das sua amigas construiram, cada uma, um gráfico de barras que traduzisse a mesma informação do gráfico circular. Qual dos gráficos seguintes traduz a informação do gráfico circular?

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> figA </choice>

<choice>figB </choice>

<choice> figC </choice>

<choice> figD </choice>

</multiplechoice>

O gráfico correto é o que está abaixo porque é neste que as percentagens são iguais nos dois gráficos.

<center>

figA

<center>

Programação

```
class E97k40_graficocircular_barras_001(Exercise):



    def make_random(s):
```

```
        #sv sao as frequencia absolutas
        s.v1= ur.iunif(5,10)
        s.v2= ur.iunif(11,20)
        s.v3= s.v2
        s.v4=ur.iunif(1,4)
        s.total1=s.v1+s.v2+s.v3+s.v4
        #fr frequencia relativa em percentagem
        s.fr1=round((s.v1/s.total1)*100,1)
        s.fr2=round((s.v2/s.total1)*100,1)
        s.fr3=round((s.v3/s.total1)*100,1)
        s.fr4=round((s.v4/s.total1)*100,1)


        s.valueslist = [ ['cabeca e face',s.v1], ['maos, punhos e
            ↪ cotovelos',s.v2], ['ombros e costas',s.v3],['pes e
            ↪ tornozelos',s.v4] ]

        s.fig1 = svg_pie_chart(s.valueslist, chartid=u"chart1",
            ↪ title=u"Sobre postura", width=400, height=300)


        s.figA = s.sage_graphic( s.barras(s.fr1,s.fr2,s.fr3,s.fr4),
            ↪ "figA", dimx=10, dimy=10)
        s.figB = s.sage_graphic( s.barras(s.fr4,s.fr2,s.fr3,s.fr1),
            ↪ "figB", dimx=10, dimy=10) #baralhar os dados
        s.figC= s.sage_graphic( s.barras(s.fr2,s.fr1,s.fr3,s.fr4), "
            ↪ figC", dimx=10, dimy=10) #baralhar os dados
        s.figD = s.sage_graphic( s.barras(s.fr2,s.fr4,s.fr3,s.fr1),
            ↪ "figD", dimx=10, dimy=10) #baralhar os dados


    def solve(s):
```

```
        pass

    def barras(s,fr1,fr2,fr3,fr4):

        import numpy as np
        import matplotlib.pylab as plt
        fig,ax = plt.subplots()

        pos=np.arange(5) # porque os ticks aparecem nos meios 0.5
        ax.bar([1,2,3,4],(fr1,fr2,fr3,fr4),align='center',color='#
            ↪ b8ff5c')
        ax.set_xticks([1,2,3,4,5])
        ax.set_xticklabels((u'face',u'maos',u'ombros',u'pes'))
        ax.set_xlabel(u'zonas do corpo')
        ax.set_ylabel(u'Percentagens')
        #ax.set_title(u'Grafico A')



        #grid(true)
        return plt
```

A.2.5 Diagrama de extremos e quartis

E97k40_graficoextremos_001

%SUMMARY Representação de dados; Diagrama de extremos e quartis

```
Este exercício pretende analisar o gráfico de extremos e quartis que
corresponde à amostra.

  SIACUAstart
  level=1
  slip=0.2
```

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(5431, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

Um grupo de alunos do 8º ano de uma escola foi questionado acerca do
número de livros de aventuras que possuem. As respostas obtidas são
$$lista2$$

Indica quais dos seguintes diagramas de extremos e quartis pode representar
o número de livros de aventuras do grupo de alunos do 8º ano.

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice>boxplot1</choice>

<choice>boxplot2</choice>

<choice>boxplot3</choice>

<choice>boxplot4</choice>

</multiplechoice>

O gráfico correto é
boxplot1.
Para representar um diagrama de extremos e quartis
necessitamos de determinar o mínimo, o máximo, os quartis (Q_{1} e Q_{3}) e
a mediana.
 Para tal
começamos por ordenar o conjunto da dados:$$lo1$$
O mínimo é min1, o máximo é max1.
 A turma tem nn alunos que é um número
lnumero@c{"par","ímpar"}. Então,a mediana é mediana1, porque
<showone
lnumero>

<thisone> é igual à média do número de livros que os alunos, que ocupam a posic2ª posição e posic3ª posição, têm . Ou seja, $$\tilde{x}=\frac{posicao2+posicao3}{2}=mediana1$$ </thisone>

<thisone> é igual ao número de livros que o aluno, que se encontra na posicao1ª posição, possui .</thisone>

</showone>

 O 1º quartil é $Q_{1}=vquartil1$ porque é a mediana dos valores que se encontram à esquerda da mediana.

O 3º quartil é $Q_{3}=vquartil3$ porque é a mediana dos valores que se encontram à direita da mediana.

Programação

```
class E97k40_graficoextremos_001(Exercise):

    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(8,20)
        s.lista1=[ur.iunif(0,15) for i in range(s.nn)]
        valores_string=[str(x)for x in s.lista1]
        s.lista2=r'\{'+','.join(valores_string)+r'\}'
        s.lo=sorted(s.lista1)
        valores_string1=[str(x)for x in s.lo]
        s.lo1=r'\{'+','.join(valores_string1)+r'\}'
        s.mediana1= median(s.lista1)
        s.min1=min(s.lista1)
        s.max1=max(s.lista1)
        s.lnumero=ur.iunif(0,1)

        if is_odd(s.nn):
            s.posicao1=(s.nn+1)/2
            s.lnumero=1
        else:
```

```
            s.posicao2=s.lo[(s.nn/2)-1]
            s.posic2=(s.nn/2)
            s.posicao3=s.lo[s.nn/2]
            s.posic3=s.posic2+1
            s.lnumero=0
            if mod(s.posicao2+s.posicao3,2)==0:
                s.mediana1=round(s.mediana1,0)
            else:
                s.mediana1=round(s.mediana1,1)
        if mod(s.nn,4)==0:
            if mod(s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4],2)==0:
                s.vquartil1=round((s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])
                    ↪ /2,0)
            else:
                s.vquartil1=round((s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])
                    ↪ /2,1)
            if mod(s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn)/4],2)==0:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn
                    ↪ )/4])/2,0)
            else:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn
                    ↪ )/4])/2,1)
        elif mod(s.nn,4)==1:
            if mod(s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn+3)/4) -1],2)==0:
                s.vquartil1=round((s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn
                    ↪ +3)/4) -1])/2,0)
            else:
                s.vquartil1=round((s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn
                    ↪ +3)/4) -1])/2,1)
            if mod(s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s.nn+5)/4) -1],2)
                ↪ ==0:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s
                    ↪ .nn+5)/4) -1])/2,0)
```

```
        else:
            s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s
                ↪ .nn+5)/4)-1])/2,1)
    elif mod(s.nn,4)==2:

        s.vquartil1=s.lo[((s.nn+2)/4)-1]

        s.vquartil3=s.lo[((3*s.nn+2)/4)-1]

    else:

        s.vquartil1=s.lo[((s.nn+1)/4)-1]
        s.vquartil3=s.lo[((3*s.nn+3)/4)-1]

    #Opcao correta.
    boxplotgraphic = s.boxplot(
            q1=s.vquartil1,
            med=s.mediana1,
            q3=s.vquartil3,
            xlabel=u"No de livros",
            vmin=s.min1,
            vmax=s.max1
    )
    s.boxplot1 = s.sage_graphic( boxplotgraphic, "boxplot1", 10,
        ↪ 10) #10cm



    #opcao errada1
    boxplotgraphic = s.boxplot(
        q1=s.vquartil1+1,
        med=s.mediana1,
        q3=s.vquartil3,
        xlabel=u"No de livros",
```

```
            vmin=s.min1,
            vmax=s.max1)
        s.boxplot2      = s.sage_graphic( boxplotgraphic, "boxplot2",
            ↪ 10, 10) #10cm


        #opcao errada2
        boxplotgraphic = s.boxplot(
            q1=s.vquartil1,
            med=s.mediana1+1,
            q3=s.vquartil3,
            xlabel=u"No de livros",
            vmin=s.min1,
            vmax=s.max1)
        s.boxplot3      = s.sage_graphic( boxplotgraphic, "boxplot3",
            ↪ 10, 10) #10cm

        #opcao errada3
        boxplotgraphic = s.boxplot(
            q1=s.vquartil1,
            med=s.mediana1,
            q3=s.vquartil3+1,
            xlabel=u"No de livros",
            vmin=s.min1,
            vmax=s.max1)
        s.boxplot4 = s.sage_graphic( boxplotgraphic, "boxplot4", 10,
            ↪ 10) #10cm


    def solve(s):
        pass
```

```
# Guardar estes comandos porque nao estao em mais lado nenhum.
#
#    def boxplot(s,values, ylim=[0,15]):
#            #Constroi o comando em R (ver celulas abaixo um teste)
#
#            #Converte uma lista de numeros numa lista de strings
#            values_str = [str(e) for e in values]
#
#            #Junta tudo no comando que desenha o boxplot.
#            #original: c = "boxplot( c( " + ', '.join(values_str)
   ↪  + " ) )"
#            c = "boxplot( c( %s ), ylim=c(%s,%s) )" % ( ', '.join(
   ↪ values_str), ylim[0], ylim[1])
#            #print c
#
#            #Envia para ser executado (desenhado).
#            return c
#



    def boxplot(self,
            q1=None,
            med=None,
            q3=None,
            vmin=None,
            vmax=None,
            xlabel="Number of Soups",
            dff=1.5,
            qmark=False,
            method="school"):

        r'''
        It draws a boxplot using given parameters.
```

```
INPUT:
- ``q1`` - first quartil
- ``med`` - median
- ``q3`` - third quartil
- ``vmin`` - sample minimum
- ``vmax`` - sample maximum
- ``xlabel`` - One or two words describing the boxplot
    ↪ random variable"
- ``dff`` - factor like: :math:`q_1-dff*(q_3-q_1)` and :math
    ↪ :`q_3+dff*(q_3-q_1)`
- ``qmark`` - plot q1,med,q3 numbers in the right axix
- ``method`` - only "school" for now (see below)

OUTPUT:
- matplotlib plot object with the boxplot

NOTES:

# Some links:
# http://stackoverflow.com/questions/3777861/setting-y-axis-
    ↪ limit-in-matplotlib
# http://matplotlib.org/examples/pylab_examples/boxplot_demo
    ↪ .html
# GRID
# http://stackoverflow.com/questions/14608483/how-to-add-a-
    ↪ grid-line-at-a-specific-location-in-matplotlib-plot
    ↪ /14610910#14610910

#Some commands:
#ax.set_yticks( list(plt.yticks()[0]) + [4.5] )
#ax.set_yticks([1.5,4.5], minor=False)
#yticks( arange(12), calendar.month_name[1:13], rotation=45
```

```
    ↪ )

#ax.axhline(4.5, linestyle='--', color='k')

#ax.arrow(0.8, 4, -0.25, 0, label="ola", linestyle='dashed',
    ↪  head_width=0.2, head_length=0.05) #, fc='k', ec='k')
#ax.arrow(1,4, -0.4, 0)

'''


import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt



# basic plot
plt.figure()



#plt.xlim( (0.9,1.1) ) #sera preciso
ax = plt.axes()

plt.xticks( [0.5], [xlabel] )

#Plots q1,med,q3
#http://matplotlib.org/api/pyplot_api.html#matplotlib.pyplot
    ↪ .plot
xstartend = [0.1,0.9]
ax.plot( xstartend,[q1,q1], 'b-')
ax.plot( xstartend,[med,med],'b-', linewidth=2)
ax.plot( xstartend,[q3,q3], 'b-')
#vertical
ax.plot( [xstartend[0],xstartend[0]], [q1,q3], 'b-' )
ax.plot( [xstartend[1],xstartend[1]], [q1,q3], 'b-' )
```

```
    #Mustache

    #In this algorithm this is not used because
    #mustches are the min and max of the sample
    #when different from q1 or q3.
    #mustache_hi  = q3 + dff*(q3-q1)
    #mustache_low = q1 - dff*(q3-q1)
    #if mustache_low < vmin: #nao se desenham outliers, o bigode
        ↪  e' sempre p minimo.
    mustache_low = vmin
    #if mustache_hi < vmax: #nao se desenham outliers, o bigode
        ↪ e' sempre o maximo
    mustache_hi = vmax

    xstartend = [0.3,0.7] #trimmed mustaches

    if mustache_low < q1:
        ax.plot( xstartend,[mustache_low,mustache_low], 'b-')
        ax.plot( [0.5,0.5], [q1,mustache_low], 'b--')
    if mustache_hi > q3:
        ax.plot( [0.5,0.5], [q3,mustache_hi], 'b--')
        ax.plot( xstartend,[mustache_hi,mustache_hi], 'b-')

    ax.set_aspect(0.1)

    #TODO: mudar este +1 e -1 abaixo dependendo da escala
    plt.ylim(    (mustache_low-1, mustache_hi+1)   )
    plt.xlim( (0,1) )

    if qmark:
        #textual labels at right
        #does not work: ax.set_yticks([q1,med,q3], minor=False)
```

```
            ax.axhline(y=q3,   xmin=0.98, xmax=1, color='black')
            ax.axhline(y=med, xmin=0.98, xmax=1, color='black')
            ax.axhline(y=q1,   xmin=0.98, xmax=1, color='black')
            ax.text(1,q3,'  '+str(q3),color='red',va='center')
            ax.text(1,med,'  '+str(med),color='red',va='center')
            ax.text(1,q1,'  '+str(q1),color='red',va='center')

        return plt
```

E97k40_graficoextremos_002

%SUMMARY Representação de dados; Diagrama de extremos e quartis

```
Este exercício pretende analisar os dados relativos a um diagrama de
extremos e quartis.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5432, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Numa autoestrada foi instalado um radar para controlar a velocidade
(Km/h) dos automóveis.
   <br>Num dia foram controlados nn automóveis e as
velocidades registadas encontram-se representadas no seguinte diagrama de
extremos e quartis.

   <center>
   boxplot1
   </center>
   Determina,
```

aproximadamente, quantos dos automóveis controlados circulavam a uma velocidade superior ou igual a

<showone cascoisas1>

<thisone>vquartil3</thisone>

<thisone>vquartil1</thisone>

</showone> Km/h.

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice>$$vresposta$$</choice>

<choice>$$errada1$$</choice>

<choice>$$errada2$$</choice>

<choice>$$errada3$$</choice>

</multiplechoice>

A resposta é

vresposta.
 Por análise do gráfico,

<showone cascoisas1>

<thisone>

vquartil3 corresponde ao valor do 3º quartil (Q_{3}).
Entre o 3º quartil e o valor máximo da distribuição encontram-se 25% das observações, logo o resultado é $0.25\times nn=vresposta$.</thisone>

<thisone> vquartil1

corresponde ao valor do 1º quartil (Q_{1}).
Entre o 1º quartil e o valor máximo da distribuição encontram-se 75% das observações, logo o resultado é $0.75\times nn=vresposta$.</thisone>

</showone>

Programação

```
class E97k40_graficoextremos_002(Exercise):
```

```
def make_random(s):
    const=ur.iunif(1,7)
    s.nn = 20*const
    s.lista1=[ur.iunif(50,145) for i in range(s.nn)]
    s.lo1=sorted(s.lista1)
    s.mediana1= median(s.lista1)
    s.min1=min(s.lista1)
    s.max1=max(s.lista1)



    if mod(s.nn,4)==0:
        s.vquartil1=round((s.lo1[(s.nn/4)-1]+s.lo1[s.nn/4])/2,1)
        s.vquartil3=round((s.lo1[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo1[(3*s.nn)
            ↪ /4])/2,1)
    elif mod(s.nn,4)==1:
        s.vquartil1=round((s.lo1[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo1[((s.nn+3)
            ↪ /4)-1])/2,1)
        s.vquartil3=round((s.lo1[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo1[((3*s.
            ↪ nn+5)/4)-1])/2,1)
    elif mod(s.nn,4)==2:
        s.vquartil1=s.lo1[((s.nn+2)/4)-1]
        s.vquartil3=s.lo1[((3*s.nn+2)/4)-1]
    else:
        s.vquartil1=s.lo1[((s.nn+1)/4)-1]
        s.vquartil3=s.lo1[((3*s.nn+3)/4)-1]

    s.a1=round(0.25*s.nn,0)
    s.a2=round(0.75*s.nn,0)
    s.cascoisas1=ur.iunif(0,1)

        #boxplotgraphic = s.boxplot(s.lista1, ylim=[25,150] )
```

```
        #s.boxplot1    = s.r_graphic( boxplotgraphic, "boxplot1
           ↪ ", 10, 10) #10cm



    #print s.vquartil1 ,s.mediana1 ,s.vquartil3

    boxplotgraphic = s.boxplot(
            xlabel="Velocidade",  # Titulo da v.a. que descreve
               ↪ os dados.
            q1=s.vquartil1 ,
            med=s.mediana1 ,
            q3=s.vquartil3 ,
            vmin=s.min1 ,
            vmax=s.max1 ,
            qmark=True
    )
    s.boxplot1    = s.sage_graphic( boxplotgraphic, "boxplot1",
        ↪ 10, 10) #10cm



def solve(s):
    if s.cascoisas1==0:


        s.vresposta=s.a1
        s.errada1=round(0.75*s.nn,0)
        s.errada2=round(0.5*s.nn,0)
        s.errada3 = s.max1-s.min1
    else:
        s.vresposta=s.a2
        s.errada1=round(0.25*s.nn,0)
        s.errada2=round(0.5*s.nn,0)
        s.errada3=s.max1-s.min1
```

```
def boxplot(self,
        q1=None,
        med=None,
        q3=None,
        vmin=None,
        vmax=None,
        xlabel="Number of Soups",
        dff=1.5,
        qmark=False,
        method="school"):

    r'''
    It draws a boxplot using given parameters.

    INPUT:
    - ``q1`` - first quartil
    - ``med`` - median
    - ``q3`` - third quartil
    - ``vmin`` - sample minimum
    - ``vmax`` - sample maximum
    - ``xlabel`` - One or two words describing the boxplot
      ↪ random variable"
    - ``dff`` - factor like: :math:`q_1-dff*(q_3-q_1)` and :math
      ↪ :`q_3+dff*(q_3-q_1)`
    - ``qmark`` - plot q1,med,q3 numbers in the right axix
    - ``method`` - only "school" for now (see below)
```

```
OUTPUT:
- matplotlib plot object with the boxplot

NOTES:

# Some links:
# http://stackoverflow.com/questions/3777861/setting-y-axis-
    ↪ limit-in-matplotlib
# http://matplotlib.org/examples/pylab_examples/boxplot_demo
    ↪ .html
# GRID
# http://stackoverflow.com/questions/14608483/how-to-add-a-
    ↪ grid-line-at-a-specific-location-in-matplotlib-plot
    ↪ /14610910#14610910

#Some commands:
#ax.set_yticks( list(plt.yticks()[0]) + [4.5] )
#ax.set_yticks([1.5,4.5], minor=False)
#yticks( arange(12), calendar.month_name[1:13], rotation=45
    ↪ )

#ax.axhline(4.5, linestyle='--', color='k')

#ax.arrow(0.8, 4, -0.25, 0, label="ola", linestyle='dashed',
    ↪  head_width=0.2, head_length=0.05) #, fc='k', ec='k')
#ax.arrow(1,4, -0.4, 0)

'''

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# basic plot
plt.figure()



#plt.xlim( (0.9,1.1) ) #sera preciso
ax = plt.axes()

plt.xticks( [0.5], [xlabel] )

#Plots q1,med,q3
#http://matplotlib.org/api/pyplot_api.html#matplotlib.pyplot
    ↪ .plot
xstartend = [0.1,0.9]
ax.plot( xstartend,[q1,q1], 'b-')
ax.plot( xstartend,[med,med],'b-', linewidth=2)
ax.plot( xstartend,[q3,q3], 'b-')
#vertical
ax.plot( [xstartend[0],xstartend[0]], [q1,q3], 'b-' )
ax.plot( [xstartend[1],xstartend[1]], [q1,q3], 'b-' )

#Mustache

#In this algorithm this is not used because
#mustches are the min and max of the sample
#when different from q1 or q3.
#mustache_hi  = q3 + dff*(q3-q1)
#mustache_low = q1 - dff*(q3-q1)
#if mustache_low < vmin: #nao se desenham outliers, o bigode
    ↪  e' sempre p minimo.
mustache_low = vmin
#if mustache_hi < vmax: #nao se desenham outliers, o bigode
    ↪ e' sempre o maximo
mustache_hi = vmax
```

```
    xstartend = [0.3,0.7] #trimmed mustaches

    if mustache_low < q1:
        ax.plot( xstartend,[mustache_low,mustache_low], 'b-')
        ax.plot( [0.5,0.5], [q1,mustache_low], 'b--')
    if mustache_hi > q3:
        ax.plot( [0.5,0.5], [q3,mustache_hi], 'b--')
        ax.plot( xstartend,[mustache_hi,mustache_hi], 'b-')

    ax.set_aspect(0.1)

    #TODO: mudar este +1 e -1 abaixo dependendo da escala
    plt.ylim(   (mustache_low-1, mustache_hi+1)  )
    plt.xlim( (0,1) )

    if qmark:
        #textual labels at right
        #does not work: ax.set_yticks([q1,med,q3], minor=False)
        ax.axhline(y=q3,  xmin=0.98, xmax=1, color='black')
        ax.axhline(y=med, xmin=0.98, xmax=1, color='black')
        ax.axhline(y=q1,  xmin=0.98, xmax=1, color='black')
        ax.text(1,q3,'  '+str(q3),color='red',va='center')
        ax.text(1,med,'  '+str(med),color='red',va='center')
        ax.text(1,q1,'  '+str(q1),color='red',va='center')

    return plt
```

A.3 Medidas de localização

A.3.1 Média

E97k40_media_001

%SUMMARY Medidas de localização; Média

Este exercício pretende calcular a média de um conjunto de dados.

SIACUAstart

level=1

slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(5421, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

Determina a média do seguinte conjunto de dados: $$lvalores2$$

Se possível, apresenta o resultado com duas casas decimais.

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresposta$$ </choice>

<choice> $$errada1$$ </choice>

<choice> $$errada2$$ </choice>

<choice> $$errada3$$ </choice>

</multiplechoice>

A média aritmética de um conjunto de
dados é igual ao quociente entre a soma de todos os dados, que é soma1, e o
número total de dados,nn. Ou seja, é $$\bar x =
\frac{lvalores3}{nn}=\frac{soma1}{nn} lsimbolo vresposta$$

Programação

```
class E97k40_media_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(8,20)
```

```
        s.lvalores=[ur.iunif(0,15)for i in range(s.nn)]
        s.soma1=sum(s.lvalores)
        lsimbolo=ur.iunif(0,1)

        valores_string = [ str(x) for x in s.lvalores ]

        s.lvalores2 = r'\{'  +  ','.join(valores_string)  +
            ↪ r'\}'
        s.lvalores3 =  '+'.join(valores_string)

    def solve(s):
        if(s.nn).divides(s.soma1):
            s.lsimbolo = '='
        elif (s.nn).divides(s.soma1*10):
            s.lsimbolo = '='
        elif(s.nn).divides(s.soma1*100):
            s.lsimbolo = '='
        else:
            s.lsimbolo = r'\approx'
        #print s.soma1,s.nn,s.soma1/s.nn,s.lsimbolo

        s.vresposta=round((s.soma1/s.nn),2)

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.soma1
        s.errada2 = round(s.vresposta-1,2)
        s.errada3 = round(s.vresposta+1,2)
```

E97k40_media_002

%SUMMARY Medidas de localização; Média

`Este exercício pretende calcular a média de um conjunto de dados.`

`SIACUAstart`

`level=1`

```
slip=0.2
guess=0.25
discr=0.3
concepts = [(5421, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A professora de matemática aplicou um teste a uma turma com v1
alunos. Depois de ter corrigido os testes, calculou a média dos resultados e
obteve n3%. Ao verificar novamente esses resultados concluiu que havia um erro
num deles. A classificação de n1% obtida por um aluno tinha sido trocada, tendo-
lhe sido atribuída erradamente a classificação de n2%. Qual é a média correta
dos resultados do teste de Matemática, após a correção do erro?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta\%$$ </choice>
   <choice> $$errada1\%$$ </choice>
   <choice> $$errada2\%$$ </choice>
   <choice> $$errada3\%$$ </choice>
</multiplechoice>
```

```
Se fizermos a diferença entre o valor correto e o valor errado obtemos:
 n1% - n2% = dif1%.
A média correta  é $$\bar{x}=\frac{soma\quad das\quad classificações\quad
corrigidas\quad dos\quad v1\quad alunos}{v1}=\frac{soma\quad das\quad
classificações\quad dos\quad v1\quad alunos + dif1}{v1}$$<br>$$=\frac{soma\quad
das\quad classificações\quad dos\quad v1\quad alunos}{v1}+\frac{dif1}{v1}=n3 +
\frac{dif1}{v1}lsimbolo vresposta\%$$.
```

Programação

```
class E97k40_media_002(Exercise):

    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(20,30)#nº de alunos da turma
        s.n3=ur.iunif(65,85)#media dos testes
        s.n1=ur.iunif(60,90)#classificacao correta do aluno
        s.n2=ur.iunif(25,55)#classificacao que o aluno obteve,
            ↪ erradamente
        s.dif1=s.n1-s.n2
        s.lsimbolo=ur.iunif(0,1)

    def solve(s):
        if(s.v1).divides(s.dif1):
            s.lsimbolo='='
        elif (s.v1).divides(s.dif1*10):
            s.lsimbolo='='
        elif (s.v1).divides(s.dif1*100):
            s.lsimbolo='='
        else:
            s.lsimbolo=r'\approx'
        s.vresposta =round((s.dif1/s.v1)+s.n3,2)

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = round(s.dif1+(s.n3/s.v1),2)
        if s.v1==s.n2:
            s.errada2=s.vresposta-1
        else:
            s.errada2 = round((s.n3*s.v1+s.n1)/s.v1,2)
        s.errada3 = s.vresposta +1
```

E97k40_media_003

%SUMMARY Medidas de localização; Média

`Este exercício pretende calcular a média de um conjunto de dados.`

```
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts= [(5421, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

O José teve uma cotação média de v1% nas primeiras n1 fichas de trabalho que realizou. Nas n2 fichas seguintes a cotação média foi de v2%.A cotação média de todas as fichas realizadas é:

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta\%$$ </choice>
   <choice> $$errada1\%$$ </choice>
   <choice> $$errada2\%$$ </choice>
   <choice> $$errada3\%$$ </choice>
</multiplechoice>
```

```
   O aluno realizou
n1+n2=total1 fichas de trabalho. <br> A cotação média de todas as fichas de
trabalho realizadas será igual ao quociente entre a cotação de todas as fichas e
o número de fichas realizadas, ou seja <br>   $$\bar{x}=\frac{n1\times
v1+n2\times v2}{n1+n2}=\frac{total2}{total1} psimbolo vresposta\%$$.
```

Programação

```
class E97k40_media_003(Exercise):

        def make_random(s):
```

```
        s.v1 = ur.iunif(60,75)#media das 1as fichas
        s.n1=ur.iunif(2,4)#no de fichas
        s.n2=ur.iunif(2,5)#no de fichas
        s.v2=ur.iunif(80,95)#media das 2as fichas
        s.total1= s.n1+s.n2
        s.a1=s.v1*s.n1
        s.a2=s.v2*s.n2
        s.total2=s.a1+s.a2
        s.psimbolo=ur.iunif(0,1)
    def solve(s):

        if (s.n1+s.n2).divides(s.n1*s.v1+s.n2*s.v2):
            s.vresposta = (s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n1+s.n2)
            s.psimbolo = '='
        elif((s.n1+s.n2)).divides((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)*10):
            s.vresposta = round((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n1+s.n2),1)
            s.psimbolo = '='
        elif((s.n1+s.n2)).divides((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)*100):
            s.vresposta = round((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n1+s.n2),2)
            s.psimbolo = '='
        else:
            s.vresposta =round((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n1+s.n2),2)
            s.psimbolo = r'\approx'



        #Opcoes Erradas
        if s.vresposta==round((s.v1+s.v2)/2,2):
            s.errada1 = round((s.v1+s.v2)/2,2)+1
        else:
            s.errada1=round((s.v1+s.v2)/2,2)
        s.errada2 =round(((s.v1+s.v2)/s.total1),2)
        s.errada3 = round(s.v1+s.v2/s.total1,2)
```

E97k40_media_004

%SUMMARY Medidas de localização; Média

```
Com este exercício pretende-se aplicar a definição de média.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Numa associação desportiva, a altura média dos seus n1 atletas
(femininos e masculinos) é de v1 metros. As atletas são n2 e têm  de altura
média v2 metros. Determina a altura média dos atletas masculinos. Se possível,
apresenta o resultado com duas casas decimais.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>



   O número de atletas masculinos é $n1
- n2=rapazes_1$.<br> A soma das alturas de todos os atletas é: $n1\times
v1=somaaltura1$<br> A soma das alturas de todas as atletas é: $n2\times
v2=somaaltura2$. <br>Logo, a soma das alturas de todos os atletas masculinos é:
$n1\times v1-n2\times v2 =total1$. <br>A média das alturas dos atletas
masculinos  é igual ao quociente entre a soma das alturas dos atletas masculinos
```

e o número desses atletas.
 Ou seja $$\bar{x}=\frac{n1\times v1-n2\times v2}{rapazes_1}=\frac{total1}{rapazes_1}\approx vresposta \quad metros$$

Programação

```
class E97k40_media_004(Exercise):


        def make_random(s):
             s.n1=ur.iunif(150,200)#total de atletas
             s.v1 = ur.runif(1.6,1.9,2)#altura media de todos os atletas
             s.n2=ur.iunif(50,100)#no de atletas femininas
             s.v2=ur.runif(1.5,1.75,2)#altura media das atletas
             s.rapazes_1=s.n1-s.n2 # no de atletas masculinos
             s.total1=s.n1*s.v1-s.n2*s.v2
             s.somaaltura1=s.n1*s.v1
             s.somaaltura2=s.n2*s.v2
             if s.v2 > s.v1:
                  s.v3=s.v2
                  s.v2=s.v1
                  s.v1=s.v3

        def solve(s):



             s.vresposta =round((s.n1*s.v1-s.n2*s.v2)/(s.n1-s.n2),2)

             #Opcoes Erradas
             s.errada1 = round((s.v1+s.v2)/2,2)
             if round((s.n1*s.v1-s.n2*s.v2)/s.n2,2) >2.2:
                 s.errada2 = round(((s.n1*s.v1-s.n2*s.v2)/(s.n1+s.n2)+0.5)
                     ↪ ,2)
             else:
                  s.errada2 = round((s.n1*s.v1-s.n2*s.v2)/s.n2,2)
             if s.errada1==round((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n2+s.n1),2):
```

```
            s.errada3 =round(((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n2+s.n1))
                ↪ +0.16,2)
        else:
            if s.errada2==round((s.n1*s.v1-s.n2*s.v2)/(s.n2),2):
                s.errada3 =round((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n2+s.n1)
                    ↪ +0.16,2)
            else:
                s.errada3=round((s.n1*s.v1+s.n2*s.v2)/(s.n2+s.n1),2)
```

E97k40_media_005

%SUMMARY Medidas de localização; Média

```
Com este exercício pretende-se aplicar as propriedades de média.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A média de uma amostra de n1 elementos é m1. Qual é a média desta
amostra se substituir cada elemento pelo seu
casov@c{"dobro","triplo","quádruplo","quíntuplo"}?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>
```

A soma dos n1 elementos da nova amostra é $fator \times m1\times n1$.
 Então a média é: $$\bar{x}=\frac{fator \times m1 \times n1}{n1}=fator \times m1=vresposta$$
Multiplicando cada elemento de um conjunto de números por uma constante, a média, vem multiplicada por essa constante.

Programação

```
class E97k40_media_005(Exercise):

    def make_random(s):
        s.n1=ur.iunif(5,20)
        s.m1=ur.iunif(10,20)
        s.fator=ur.iunif(2,5)
        s.casov=s.fator-2



    def solve(s):

        s.vresposta =s.fator*s.m1

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.fator+s.m1
        s.errada2 = s.m1
        if s.errada1==s.n1*s.fator:
            s.errada3 = s.n1*s.fator+1
        else:
            s.errada3=s.n1*s.fator
```

E97k40_media_006

%SUMMARY Medidas de localização; Média

Com este exercício pretende-se aplicar as propriedades de média.

```
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A média de uma amostra de n1 elementos é m1. Qual é a média desta
amostra se a cada elemento se adicionar o número n2?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A média é:$$\bar{x}=\frac{soma\quad
dos\quad n1\quad elementos + n1\times n2}{n1}= \frac{soma\quad dos\quad n1\quad
elementos}{n1}+\frac{n1\times n2}{n1}=m1+n2=vresposta$$
 <br> Se adicionarmos um valor constante a cada um dos elementos de um conjunto
 de números, a média vem adicionada a essa constante.
```

Programação

```
class E97k40_media_006(Exercise):


        def make_random(s):
             s.n1=ur.iunif(5,20)#no de elementos do conjunto
             s.m1=ur.iunif(10,20)#media
```

```
        s.n2=ur.iunif(5,20)#no que se adiciona a cada elemento do
            ↪ conjunto
        s.const1=2

    def solve(s):

        s.vresposta = s.m1+s.n2

        #Opcoes Erradas
        if s.n1<>s.m1:
            if (s.const1).divides((s.n1+s.n2)+(s.m1+s.n2)):
                s.errada1=round(((s.n1+s.n2)+(s.m1+s.n2))/2,0)
            else:
                s.errada1=round(((s.n1+s.n2)+(s.m1+s.n2))/2,1)
        else:
            s.errada1=s.m1+s.n2-1

        if (s.const1).divides((s.m1+s.n2)):
            s.errada2 = round((s.m1+s.n2)/2,0)
        else:
            s.errada2 = round((s.m1+s.n2)/2,2)
        s.errada3 =s.n1+s.m1+s.n2
```

A.3.2 Média e tabela de frequências

E97k40_media_tabelas_001

%SUMMARY Medidas de localização; Média e tabelas de frequências

```
Este exercício pretende calcular a média.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
```

```
   discr=0.3
   concepts = [(5421,0.5),(5411,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Na tabela seguinte estão representadas as idades, em anos, dos a1 alunos
de uma turma.
       <table border="1">
   <tr align = "center"> <td> idades
</td> <td> número de alunos </td> </tr>
   <tr align = "center"> <td> $v1$
</td> <td> $fa1$ </td> </tr>
   <tr align = "center"> <td> $v2$ </td> <td> $fa2$
</td> </tr>
   <tr align = "center"> <td> $v3$ </td> <td> $fa3$ </td> </tr>
<tr align = "center"> <td> $v4$ </td> <td> $fa4$ </td> </tr>
   </table>
A média das idades dos alunos da turma é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

    Para determinar a média temos que
adicionar as idades de todos os alunos e dividir, essa soma, pelo número total
de alunos,ou seja,$$\frac{v1\times fa1+v2\times fa2+v3\times fa3+v4\times
fa4}{fa1+fa2+fa3+fa4}=\frac{total1}{total2}lsimbolo vresposta \quad anos$$
```

Programação

```
class E97k40_media_tabelas_001(Exercise):



    def make_random(s):
        s.v1= ur.iunif(9,17)
        s.v2=s.v1+1
        s.v3=s.v2+1
        s.v4=s.v3+1
        s.a1= ur.iunif(20,30)
        s.fa4=ur.iunif(1,2)
        s.fa3=ur.iunif(1,3)
        s.fa1=ur.iunif(floor(0.20*s.a1)-2,floor(0.20*s.a1)+2)
        s.fa2=s.a1-(s.fa1+s.fa3+s.fa4)
        s.total1=s.v1*s.fa1+s.v2*s.fa2+s.v3*s.fa3+s.v4*s.fa4#total
            ↪ das idades dos alunos
        s.const1=4
        s.lsimbolo=ur.iunif(0,1)
        s.total2=s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4#no de alunos
    def solve(s):
        if(s.a1).divides(s.total1):
            s.vresposta =round(s.total1/s.a1,0)
            s.lsimbolo='='
        elif(s.a1).divides(s.total1*10):
            s.vresposta =round(s.total1/s.a1,2)
            s.lsimbolo='='
        elif(s.a1).divides(s.total1*100):
            s.vresposta =round(s.total1/s.a1,2)
            s.lsimbolo='='
        else:
             s.vresposta =round(s.total1/s.a1,2)
             s.lsimbolo=r'\approx'
```

```
        #Opcoes Erradas
        if (s.const1).divides(s.total1):
            s.errada1 = round((s.v1*s.fa1+s.v2*s.fa2+s.v3*s.fa3+s.v4
                ↪ *s.fa4)/4,0)
        else:
            s.errada1 = round((s.v1*s.fa1+s.v2*s.fa2+s.v3*s.fa3+s.v4
                ↪ *s.fa4)/4,2)
        if (s.const1).divides(s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4):
            s.errada2 = round((s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4)/4,0)
        else:
            s.errada2 = round((s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4)/4,2)
        s.errada3 =round((s.v1+s.v2+s.v3+s.v4)/4,2)
```

A.3.3 Média e gráfico de barras

E97k40_media_grafico_002

%SUMMARY Medidas de localização; Média e gráfico de barras

```
Este exercício pretende calcular a média.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421,0.5),(5412,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de Matemática
consistiu em fazer o registo das idades dos alunos de um dos anos de
escolaridade da sua escola, tendo elaborado um gráfico da distribuição dos
alunos por idades.
   O gráfico que o João elaborou está correto e apresenta-se
```

a seguir.

<center>

fig1

</center>

Qual é a média das idades dos alunos desse ano de escolaridade, da escola do João?

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresposta$$ </choice>

<choice> $$errada1$$ </choice>

<choice> $$errada2$$ </choice>

<choice> $$errada3$$

</choice>

</multiplechoice>

Para determinar a média temos que adicionar as idades de todos os alunos e dividir, essa soma, pelo número total de alunos, ou seja,

$$\frac{al1\times fa1+al2\times fa2+al3\times fa3+al4\times fa4}{fa1+fa2+fa3+fa4}=\frac{soma1}{a1}lsimbolo vresposta \quad anos$$

Programação

```
class E97k40_media_grafico_002(Exercise):

    def make_random(s):
        s.al1=ur.iunif(9,16)
        s.al2= s.al1+1
        s.al3=s.al2+1
        s.al4=s.al3+1
```

```
        s.fa1=ur.iunif(50,80)
        s.fa2=ur.iunif(40,45)
        s.fa3=ur.iunif(20,25)
        s.fa4=ur.iunif(10,20)
        s.a1= s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4
        s.soma1=s.al1*s.fa1+s.al2*s.fa2+s.al3*s.fa3+s.al4*s.fa4
        s.lsimbolo=ur.iunif(0,1)
        s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(), "fig1", dimx=10, dimy
          ↪ =10)
        s.const1=4
    def solve(s):
        if (s.a1).divides(s.soma1):
            s.vresposta =round((s.al1*s.fa1+s.al2*s.fa2+s.al3*s.fa3+
              ↪ s.al4*s.fa4)/s.a1,0)
            s.lsimbolo='='
        else:
            s.vresposta =round((s.al1*s.fa1+s.al2*s.fa2+s.al3*s.fa3+
              ↪ s.al4*s.fa4)/s.a1,1)
            s.lsimbolo=r'\approx'
        #Opcoes Erradas
        if (s.const1).divides (s.a1):
            s.errada1 = round((s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4)/4,0)
        else:
            s.errada1 = round((s.fa1+s.fa2+s.fa3+s.fa4)/4,1)
        s.errada2 = round((s.al1+s.al2+s.al3+s.al4)/4,1)
        s.errada3 =round((s.al1*s.fa1+s.al2*s.fa2+s.al3*s.fa3+s.al4*
          ↪ s.fa4)/(s.al1+s.al2+s.al3+s.al4),1)

    def barras(s):
        import numpy as np
        import matplotlib.pylab as plt
        fig,ax = plt.subplots()
```

```
        pos=np.arange(3) #porque os ticks aparecem nos meios 0.5
        ax.bar([s.al1,s.al2,s.al3,s.al4],(s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4),
            ↪ align='center',color='#b8ff5c')
        ax.set_xticks([s.al1,s.al2,s.al3,s.al4])
        ax.set_xticklabels((s.al1,s.al2,s.al3,s.al4))
        ax.set_xlabel(u'idades')
        ax.set_ylabel(u'No de alunos')
        ax.set_title(u'Idades dos alunos ')
        #grid(true)
        for e in zip( [s.al1,s.al2,s.al3,s.al4], [s.fa1,s.fa2,s.fa3,
            ↪ s.fa4] ):
            ax.text( e[0], e[1]-0.1, str(e[1]), horizontalalignment
                ↪ ='center', verticalalignment='top')
        return plt
```

E97k40_media_grafico_001

%SUMMARY Medidas de localização; Média e gráfico de barras

```
Este exercício pretende aplicar a definição de média.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421, 0.5),(5412,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Um dos trabalhos realizados pela Inês e pelo Bruno para a disciplina de
Matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9º ano da sua
escola, elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades e determinar a
média das idades dos alunos.
   Depois de recolherem os dados, o Bruno e a Inês
combinaram que o Bruno ia elaborar o gráfico e a Inês ia determinar a média.
```

```
A figura mostra o gráfico elaborado pelo Bruno.
   <center>
   fig1
   <center>
O Gráfico não está completo pois o Bruno esqueceu-se de considerar os alunos com
16 anos.
   A média das idades, corretamente obtida pela Inês, é
ln1@c{"14,5","15","15,5"} anos.
   Quantos alunos com 16 anos frequentam o 9º
ano na escola da Inês e do Bruno?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>




   <br>Se x representar o número de
alunos com 16 anos,e pela definição de média obtém-se equação $$\frac{13\times
fa1+14\times fa2+15\times fa3+16\times x}{fa1+fa2+fa3+x}=n1$$.

   <showone
ln1>
   <thisone>  <br> $$\Leftrightarrow \frac{soma1 +
16x}{soma2+x}=n1$$<br>$$\Leftrightarrow soma1+16x=n1\times soma2+n1x$$<br>
$$\Leftrightarrow 16x-n1x=prod1-soma1$$<br> $$\Leftrightarrow
1.5x=dif1$$<br>$$\Leftrightarrow x=\frac{dif1}{1.5}=vresposta$$ <br> Frequentam
o 9ºano vresposta alunos com 16 anos.</thisone>
   <thisone>
```

```
<br>$$\Leftrightarrow \frac{soma1 + 16x}{soma2+x}=n1$$<br>$$\Leftrightarrow
soma1+16x=n1\times soma2+n1x$$<br> $$\Leftrightarrow 16x-n1x=prod2-soma1$$<br>
$$\Leftrightarrow x=vresposta$$ <br> Frequentam o 9°ano vresposta alunos com 16
anos.</thisone>
   <thisone><br> $$\Leftrightarrow \frac{soma1 +
16x}{soma2+x}=n1$$<br>$$\Leftrightarrow soma1+16x=n1\times soma2+n1x$$<br>
$$\Leftrightarrow 16x-n1x=prod3-soma1$$<br> $$\Leftrightarrow
0.5x=dif2$$<br>$$\Leftrightarrow x=\frac{dif2}{0.5}=vresposta$$ <br> Frequentam
o 9°ano vresposta alunos com 16 anos.</thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97k40_media_grafico_001(Exercise):

    def make_random(s):

        s.fa1=ur.iunif(2,8)
        s.fa2=30+3*ur.iunif(0,3)
        s.fa3=30+3*ur.iunif(0,3)
        s.fator1=ur.iunif(2,4)
        s.soma1=13*s.fa1+14*s.fa2+15*s.fa3
        s.soma2=s.fa1+s.fa2+s.fa3

        s.ln1=s.fator1-2
        if s.ln1==0:
            s.n1=round(14.5,1)
            s.prod1=s.n1*s.soma2
            s.dif1=s.n1*s.soma2-s.soma1
        elif s.ln1==1:
            s.n1=15
            s.prod2=s.n1*s.soma2
        else:
            s.n1=round(15.5,1)
```

```
            s.prod3=s.n1*s.soma2
            s.dif2=s.prod3-s.soma1

        s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(), "fig1", dimx=10, dimy
            ↪ =10)

    def solve(s):

        s.vresposta =round((s.fa1*(s.n1-13)+s.fa2*(s.n1-14)+s.fa3*(s
            ↪ .n1-15))/(16-s.n1),0)

        #Opcoes Erradas
        if s.n1==14.5:
            s.errada1 = s.fa1+s.fa2/3
            s.errada2 = s.fa1+s.fa2+s.fa3
            s.errada3 =abs(s.fa1-s.fa2-(1/3)*s.fa3)
        elif s.n1==15:
            s.errada1= s.fa1+s.fa2
            s.errada2=s.fa1+2*s.fa2
            s.errada3=s.fa1+s.fa3/3
        else:
            s.errada1=5*s.fa1+3*s.fa2
            s.errada2=5*s.fa1+s.fa3
            s.errada3=s.fa1+3*s.fa2+s.fa3



    def barras(s):
        import numpy as np
        import matplotlib.pylab as plt
        fig,ax = plt.subplots()

        pos=np.arange(3) #porque os ticks aparecem nos meios 0.5
        ax.bar([13,14,15],(s.fa1,s.fa2,s.fa3),align='center',color
```

```
    ↪ ='#b8ff5c')
ax.set_xticks([13,14,15])
ax.set_xticklabels(('13','14','15'))
ax.set_xlabel(u'idades')
ax.set_ylabel(u'No de alunos')
ax.set_title(u'Idades dos alunos do 9oano')

for e in zip( [13,14,15], [s.fa1,s.fa2,s.fa3] ):
    ax.text( e[0], e[1]-0.1, str(e[1]), horizontalalignment
        ↪ ='center', verticalalignment='top')

#grid(true)
return plt
```

E97k40_media_grafico_003

%SUMMARY Medidas de localização; Média e gráfico de barras

```
Este exercício pretende calcular a média, aplicar a definição de
média, propriedades e os dados são apresentados sob a forma de gráfico.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421, 0.5),(5412,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
O gráfico mostra o número de vasos com manjericos vendidos, num arraial,
nos dias 11, 12 e 13 de Junho.
   O número médio de vasos com manjericos
vendidos por dia, nesse arraial, nos primeiros dez dias do mês de Junho, foi
igual a a1.
```

<center>

fig1

</center>

Qual foi o número médio de vasos com manjericos vendidos por dia, nesse arraial, nos primeiros treze dias de Junho?

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresposta$$ </choice>

<choice> $$errada1$$ </choice>

<choice> $$errada2$$ </choice>

<choice> $$errada3$$ </choice>

</multiplechoice>

Nos primeiros 10 dias venderam -se um total $a1\times 10=a2$ vasos.
Para determinar a média dos vasos vendidos nos primeiros treze dias do mês temos que adicionar os vasos vendidos nesses treze dias e dividir pelos treze dias. Ou seja, a resposta é $$\frac{fa1+fa2+fa3+a2}{13}\approx vresposta$$

Programação

```
class E97k40_media_grafico_003(Exercise):

    def make_random(s):
        s.a1=ur.iunif(3,10)
        s.fa1=ur.iunif(11,20)
        s.fa2=ur.iunif(15,25)
        s.fa3=ur.iunif(20,30)
        s.a2=s.a1*10
```

```
        s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(), "fig1", dimx=10, dimy
            ↪ =10)

    def solve(s):

        s.vresposta =round((s.fa1+s.fa2+s.fa3+10*s.a1)/13,0)

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = round(s.a1+(s.fa1+s.fa2+s.fa3)/13,0)
        s.errada2 = round((s.fa1+s.fa2+s.fa3)/3,0)
        s.errada3 =round((s.a1+s.fa1+s.fa2+s.fa3)/4,0)

    def barras(s):
        import numpy as np
        import matplotlib.pylab as plt
        fig,ax = plt.subplots()

        pos=np.arange(3) #porque os ticks aparecem nos meios 0.5
        ax.bar([11,12,13],(s.fa1,s.fa2,s.fa3),align='center',color
            ↪ ='#b8ff5c')
        ax.set_xticks([11,12,13])
        ax.set_xticklabels(('11','12','13'))
        ax.set_xlabel(u'dias')
        ax.set_ylabel(u'no de vasos')
        ax.set_title(u'Vasos vendidos')
        #grid(true)
        for e in zip( [11,12,13], [s.fa1,s.fa2,s.fa3] ):
            ax.text( e[0], e[1]-0.1, str(e[1]), horizontalalignment
                ↪ ='center', verticalalignment='top')
        return plt
```

A.3.4 Média e diagrama de caule-e-folhas

E97k40_media_caulefolhas_001

%SUMMARY Medidas de localização; Média e diagrama de caule-e-folhas

```
Este exercício pretende aplicar as definições de média.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5421, 0.5),(5412,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
As idades dos professores que participaram numa reunião estão
representadas no diagrama de caule e folhas que se segue.

     stem1
A média das idades dos professores é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A média das idades dos
professores é igual ao quociente entre a soma das suas idades e o total de
professores, ou seja, $$\bar{x}=\frac{valores1}{nn}=\frac{soma1}{nn}\approx
vresposta \quad anos$$
```

Programação

```
class E97k40_media_caulefolhas_001(Exercise):

    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(15,30)
        s.lista1=[ur.iunif(24,60) for i in range (s.nn)]
        #print s.lista1
        s.lista2=sorted(s.lista1)
        valores_string=[str(x) for x in s.lista2]
        s.valores1='+'.join (valores_string)
        s.soma1= sum(s.lista1)
        s.stem1 = r_stem( s.lista1 )

    def solve(s):
        s.vresposta=round(mean(s.lista1),1)
        #Opcoes Erradas
        s.errada1=s.vresposta+1
        s.errada2=round(sum(s.lista1)/(s.nn-1))
        s.errada3=s.vresposta-1
```

A.3.5 Mediana

E97k40_mediana_001

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana

```
Este exercício pretende calcular a mediana de um conjunto de dados.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5423, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Determina a mediana do seguinte conjunto de dados: $$lvalores1$$
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>



   Para encontrar o valor da mediana
primeiro deve-se ordenar o conjunto de dados (por ordem crescente ou
decrescente):
       $$lvalores2$$
   Como neste conjunto há um número ímpar de
elementos, a mediana é o valor que ocupa a posição central (3ª posição), ou
seja, é $$\tilde{x}=vresposta$$
```

Programação

```
class E97k40_mediana_001(Exercise):

        def make_random(s):
             s.v1 = ur.iunif(1,5)
             s.v2 = ur.iunif(12,20)
             s.v3 = ur.iunif(21,25)
             s.v4 = ur.iunif(6,11)
             s.v5 = ur.iunif(25,30)

        def solve(s):
             s.lvalores=[s.v1,s.v2,s.v3,s.v4,s.v5]
             valores_string1=[str(x) for x in s.lvalores]
```

```
            s.lvalores1=r'\{'+','.join(valores_string1)+r'\}'
            s.lvaloresordenados=sorted(s.lvalores)
            valores_string=[str(x) for x in s.lvaloresordenados]
            s.lvalores2=r'\{'+','.join(valores_string)+r'\}'
            s.vresposta =median(s.lvalores)

            #Opcoes Erradas
            s.errada1 = s.v3
            s.errada2 = s.v1
            s.errada3 = s.v4
```

E97k40_mediana_002

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana

```
Este exercício pretende calcular a mediana de um conjunto de dados.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5423, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Considera o seguinte conjunto de dados: $$lvalores3$$.<br> A mediana
é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
```

```
</multiplechoice>


   Para encontrar o valor da mediana
primeiro deve-se ordenar o conjunto de dados (por ordem crescente ou
de crescente):
       $$lvalores2$$
   Como o conjunto de dados tem um número par
de elementos, então a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais(3ª
e 4ª posição):
       $$\tilde{x}=\frac{m1+m2}{2} lsimbolo vresposta$$
```

Programação

```
class E97k40_mediana_002(Exercise):

    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(1,5)
        s.v2 = ur.iunif(11,15)
        s.v3 = ur.iunif(16,20)
        s.v4 = ur.iunif(6,10)
        s.v5 = ur.iunif(21,25)
        s.v6= ur.iunif(26,30)

    def solve(s):
        s.lvalores=[s.v1,s.v2,s.v3,s.v4,s.v5,s.v6]
        valores_string1=[str(x)for x in s.lvalores]
        s.lvalores3=r'\{'+','.join (valores_string1)+r'\}'
        s.lvalores1=sorted(s.lvalores)
        #para o latex aparecer com (....)
        s.lvalores1set = tuple(s.lvalores1)
        valores_string=[str(x)for x in s.lvalores1set]
        s.lvalores2=r'\{'+','.join (valores_string)+r'\}'

        v3v4 = s.lvalores1[2] + s.lvalores1[3]
```

```
        if 2.divides(v3v4):
            s.lsimbolo = r'='
            s.vresposta = v3v4/2
        else:
            s.lsimbolo = r'='
            s.vresposta = round(v3v4/2.0,1)

        #s.vresposta=median(s.lvalores)

        s.m1=s.lvalores1[2]
        s.m2=s.lvalores1[3]

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.v3
        if 2.divides(s.v3+s.v4):
            s.errada2=round((s.v3+s.v4)/2,0)
        else:
            s.errada2 = round((s.v3+s.v4)/2,1)
        s.errada3 = s.v4
```

E97k40_mediana_003

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana

```
Este exercício pretende calcular a mediana de um conjunto de dados.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts =[(5423, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Determina a mediana do seguinte conjunto de dados: $$lvalores1$$
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A resposta é $vresposta$.
   Para
encontrar o valor da mediana primeiro deve-se ordenar o conjunto de dados (por
ordem crescente ou decrescente):
       $$lvalores2$$
   Como neste conjunto há
nn elementos, que é um número casmedian@c{"par","ímpar"}, então a mediana é
vresposta, porque
   <showone       casmedian>
   <thisone> é igual à média dos
dois valores centrais (posic2º e posic3º), ou seja,
$$\tilde{x}=\frac{posicao2+posicao3}{2}=\frac{soma1}{2}=vresposta$$ .</thisone>
<thisone> é o valor que ocupa a posição central, que neste caso é $posicao1$ª
posição.</thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97k40_mediana_003(Exercise):

        def make_random(s):
            s.nn = ur.iunif(8,20)
            s.lvalores=[ur.iunif(0,15)for i in range(s.nn)]
            valores_string1=[str(x)for x in s.lvalores]
```

```
        s.lvalores1=r'\{'+','.join (valores_string1)+r'\}'
        s.lvaloresordenados=sorted(s.lvalores)
        valores_string=[str(x) for x in s.lvaloresordenados]
        s.lvalores2=r'\{'+','.join (valores_string) + r'\}'
        s.lmediana=median(s.lvalores)
        s.casmedian=ur.iunif(0,1)
        if is_odd(s.nn):
            s.posicao1=(s.nn+1)/2
            s.casmedian=1
        else:
            s.posicao2=s.lvaloresordenados[(s.nn/2)-1]
            s.posic2=(s.nn/2)
            s.posicao3=s.lvaloresordenados[s.nn/2]
            s.posic3=s.posic2+1
            s.casmedian=0
            s.soma1=s.posicao2+s.posicao3

    def solve(s):
        if is_odd(s.nn):
            s.vresposta=s.lmediana
        else:
            if 2.divides(s.soma1):
                s.vresposta= s.lmediana
            else:
                s.vresposta= round(s.lmediana,1)

        #Opcoes Erradas
        s.errada1=s.vresposta+1
        if s.errada1==max(s.lvalores):
            s.errada2=min(s.lvalores)
        else:
            s.errada2=max(s.lvalores)
        s.errada3 = s.vresposta-1
```

A.3.6 Mediana e tabela de frequências

E97k40_mediana_tabelas_001

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana e tabelas de frequência

```
Este exercício pretende aplicar as definições de mediana.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5423, 0.5),(5411,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Na tabela seguinte estão representadas as idades dos a1 alunos de uma
turma.
       <table border="1">
   <tr align="center"> <td> idades </td> <td>
nº de alunos </td> </tr>
   <tr align="center"> <td> $v1$ </td> <td> $fa1$
</td> </tr>
   <tr align="center"> <td> $v2$ </td> <td> $fa2$ </td> </tr>
   <tr
align="center"> <td> $v3$ </td> <td> $fa3$ </td> </tr>
   <tr align="center">
<td> $v4$ </td> <td> $fa4$ </td> </tr>
   </table>

   A mediana das idades dos alunos da turma é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
```

```
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A turma tem um número
lnumero@c{"par","ímpar"} de alunos. Então a mediana é vresposta, porque
<showone       lnumero>
   <thisone> é igual média das idades dos alunos que
ocupam a posição indice_mediana2 (idade1 anos) e a posição indice_mediana3
(idade2 anos). Ou seja, $$\frac{idade1+idade2}{2}=vresposta$$ .</thisone>
<thisone> é a idade correspondente ao aluno que ocupa a posição central, ou seja
a indice_mediana1ª posição .</thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97k40_mediana_tabelas_001(Exercise):

    def mesmo(s,constante,quantidade):
        #cria lista com uma dada quantidade de constante.
        return [ constante for i in range(quantidade)]

    def make_random(s):
        s.v1= ur.iunif(9,17)
        s.v2=s.v1+1
        s.v3=s.v2+1
        s.v4=s.v3+1
        s.a1= ur.iunif(20,30)
        s.fa4=ur.iunif(1,2)
        s.fa3=ur.iunif(1,3)
        s.fa1=ur.iunif(floor(0.20*s.a1)-2,floor(0.20*s.a1)+2)
        s.fa2=s.a1-(s.fa1+s.fa3+s.fa4)
        s.lnumero=ur.iunif(0,1)
```

```
        s.const=round((s.v1+s.v2)/2,1)
        s.const1=round((s.v2+s.v3)/2,1)

    def solve(s):
        amostra = s.mesmo(s.v1,s.fa1) + s.mesmo(s.v2,s.fa2)+ s.mesmo
            ↪ (s.v3,s.fa3)+ s.mesmo(s.v4,s.fa4)
        s.lmediana1=median(amostra)

        if is_odd(s.a1):
            s.indice_mediana1 = (s.a1+1)/2
            s.lnumero=1
        else:
            s.indice_mediana2 = s.a1/2
            s.idade1=amostra[s.indice_mediana2 -1]
            s.indice_mediana3 = (s.a1/2)+1
            s.idade2=amostra[s.indice_mediana2]
            s.lnumero=0



        s.vresposta = s.lmediana1

        #Opcoes Erradas
        if is_odd(s.a1):
            if s.v1==s.vresposta:
                s.errada1= s.v2
                s.errada2=s.v3
                s.errada3=s.v4
            else:
                s.errada1= s.v1
                s.errada2=s.v3
                s.errada3=s.v4
        else:
            if s.v1==s.vresposta:
```

```
          s.errada1= s.v2
          s.errada2=s.v3
          s.errada3=s.v4
      elif s.v2==s.vresposta:
          s.errada1=s.v1
          s.errada2=s.const
          s.errada3=s.const1
      elif s.vresposta==const:
          s.errada1=s.v1
          s.errada2=s.v2
          s.errada3=s.const1
      else:
          s.errada1=s.v1
          s.errada2=s.v2
          s.errada3=s.const
```

E97k40_medianaversao2_tabelas_002

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana

```
Este exercício pretende aplicar as definições de mediana.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5423, 0.5),(5411,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Na escola do João há três modalidades no Desporto Escolar: natação,
futebol e dança.
   Na tabela são apresentados os dados relativos ao número de
alunos da escola inscritos, na modalidade de futebol, em função da sua idade.
<table border="1">
```

```
   <tr> <td> $idade$ </td> <td> 11 </td> <td> 12 </td> <td>
13 </td> <td> 14 </td> <td> 15</td> </tr>
   <tr> <td> $futebol$ </td> <td>
fa1 </td> <td> fa2 </td> <td>a3 </td> <td> fa4 </td> <td> fa5</td> </tr>
</table>

   Sabendo que a idade mediana dos alunos que praticam futebol
é casomedian@c{"12.5","13.5","14.5"}, o valor de a3 é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   <showone    casomedian>
   <thisone>
Se a mediana é 12,5 é porque o número de alunos é par e por isso os valores
centrais correspondem a 12 e a 13 anos. <br>Nesse caso têm que ser tantos
valores inferiores ou iguais a 12 como superiores ou iguais a 13.<br>Como há b1
dados inferiores ou iguais a 12 e b2 dados superiores a 13  então $a3=
b1-b2=vresposta$. </thisone>
   <thisone>Se a mediana é 13,5 é porque o número
de alunos é par e por isso os valores centrais correspondem a 13 e 14 anos.<br>
Nesse caso têm que ser tantos valores inferiores ou iguais a 13 como o número de
dados superiores ou iguais a 14. <br>Como há a3+b3 dados inferiores ou iguais a
13 e b4 dados superiores ou iguais a 14  então $a3= b4-b3=vresposta$. </thisone>
<thisone> Se a mediana é 14,5 é porque o número de alunos é par e por isso os
valores centrais correspondem a 14 e 15 anos.<br> Nesse caso têm que ser tantos
valores inferiores ou iguais a 14 como o número de dados iguais a 15.<br> Como
há b5+a3 dados inferiores ou iguais a 14 e fa5 dados  iguais a 15  então $a3=
```

fa5-b5=vresposta$. </thisone>

</showone>

Programação

```
class E97k40_medianaversao2_tabelas_002(Exercise):

    def make_random(s):
        s.n1=ur.iunif(10,15)
        s.total1=2*s.n1
        s.m1=ur.iunif(1,3)
        s.mediana1=round(11.5+s.m1,1)

        #casomedian deve ser inteiro: 0, 1 ou 2.

        s.casomedian=int(s.mediana1-12.5)

        if s.m1==1:
            s.fa1=ur.iunif(1,(s.total1/2)-1)
            s.fa2=(s.total1/2)-s.fa1
            s.fa4=ur.iunif(1,4)
            s.fa5=ur.iunif(1,5)
            s.b1=s.fa1+s.fa2
            s.b2=s.fa4+s.fa5

        elif s.m1==2:
            s.fa1=ur.iunif(1,5)
            s.fa2=ur.iunif(1,4)
            s.fa4=ur.iunif(1,(s.total1/2)-2)
            s.fa5=(s.total1/2)-s.fa4
            s.b3=s.fa1+s.fa2
            s.b4=s.fa4+s.fa5
        else:
            s.fa1=ur.iunif(1,3)
```

```
            s.fa2=ur.iunif(2,4)
            s.fa4=ur.iunif(1,(s.total1/2)-s.fa1-s.fa2-1)
            s.fa5=(s.total1/2)
            s.b5=s.fa1+s.fa2+s.fa4

    def solve(s):
        if s.m1==1:
            s.vresposta =(s.total1/2)-s.fa4-s.fa5
        elif s.m1==2:
            s.vresposta =(s.total1/2)-s.fa1-s.fa2
        else:
            s.vresposta =(s.total1/2)-s.fa1-s.fa2-s.fa4

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.total1/2
        s.errada2 = (s.total1/2)-1
        if s.m1==1:
            s.errada3=s.fa1+s.fa2-s.fa5
        elif s.m1==2:
            s.errada3=s.fa1+s.fa2
        else:
            s.errada3= s.fa1+s.fa2+s.fa4
```

A.3.7 Mediana e gráfico de barras

E97k40_mediana_grafico_001

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana e gráfico de barras

```
Este exercício pretende determinar a mediana, estando os dados
apresentados sob a forma de gráfico de barras

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
```

```
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5423, 0.5),(5412,0.5)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A Catarina guarda no mealheiro moedas de valor maior ou igual a dez
cêntimos. A distribuição das moedas que a Catarina tem no mealheiro está
apresentada no gráfico de barras.Considera a distribuição das moedas atendendo
ao seu valor e determina a mediana.
   <center>
   fig1
   </center>
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
   </multiplechoice>

   A Catarina tem nn moedas, que é um número
lnumero@c{"par","ímpar"} de moedas.<br> Então, a mediana é vresposta, porque
<showone       lnumero>
   <thisone> é igual média do valor das moedas que
ocupam a  indice_mediana2ª posição  e a indice_mediana3ª posição . Ou seja,
$$\frac{valor1+valor2}{2}=vresposta$$ .</thisone>
   <thisone> é o valor da
moeda correspondente àquela que ocupa a posição central, ou seja a
indice_mediana1ª posição .</thisone>
   </showone>
```

Programação

```
class E97k40_mediana_grafico_001(Exercise):


    def mesmo(s,constante,quantidade):
        #cria lista com uma dada quantidade de constante.
        return [ constante for i in range(quantidade)]


    def make_random(s):
        s.nn=ur.iunif(10,20)
        partition_element=Partitions(s.nn,length=5).random_element()
        lista=list(partition_element)
        shuffle(lista)
        s.fa1 = lista[0]
        s.fa2 = lista[1]
        s.fa3 = lista[2]
        s.fa4 = lista[3]
        s.fa5 = lista[4]
        s.m1=round(0.1,1)
        s.m2=round(0.2,1)
        s.m3=round(0.5,1)
        s.m4=1
        s.m5=2
        s.lnumero=ur.iunif(0,1)

        s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(), "fig1", dimx=10, dimy
           ↪ =10)

    def solve(s):

        amostra = s.mesmo(s.m1,s.fa1) + s.mesmo(s.m2,s.fa2) + \
                  s.mesmo(s.m3,s.fa3) + s.mesmo(s.m4,s.fa4) + \
                  s.mesmo(s.m5,s.fa5)
```

```
#print amostra
s.lmediana1 = median(amostra)
print s.lmediana1
s.vresposta=s.lmediana1

if is_odd(s.nn):
    s.indice_mediana1 = (s.nn+1)/2
    s.lnumero=1
else:
    s.indice_mediana2 = s.nn/2
    s.valor1=amostra[s.indice_mediana2 -1]
    s.indice_mediana3 = (s.nn/2)+1
    s.valor2=amostra[s.indice_mediana2]
    s.lnumero=0



#Opcoes Erradas
if s.vresposta==s.m1:
    s.errada1= s.m2
    s.errada2=s.m3
    s.errada3=choice([s.m4,s.m5])
elif s.vresposta==s.m2:
    s.errada1= s.m1
    s.errada2=s.m3
    s.errada3=choice([s.m4,s.m5])
elif s.vresposta== s.m3:
    s.errada1= s.m1
    s.errada2=s.m2
    s.errada3=choice([s.m4,s.m5])
elif s.vresposta== s.m4:
    s.errada1= s.m1
    s.errada2=s.m2
    s.errada3=choice([s.m3,s.m5])
```

```
        else:
            s.errada1= s.m1
            s.errada2=s.m2
            s.errada3=choice([s.m3,s.m4])

def barras(s):
    import numpy as np
    import matplotlib.pylab as plt
    fig,ax = plt.subplots()

    pos=np.arange(5) #pedro: porque os ticks aparecem nos meios
        ↪ 0.5
    ax.bar([1,2,3,4,5],(s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5),align='
        ↪ center',color='#b8ff5c')
    ax.set_xticks([1,2,3,4,5])
    ax.set_xticklabels(('0,1','0,2','0,5','1','2'))
    ax.set_xlabel(u'Valor das moedas no mealheiro (em euros)')
    ax.set_ylabel(u'No de moedas')
    ax.set_title(u'Mealheiro da Catarina')

    #
    # Exemplos explicativos aqui:
    #
    #  http://matplotlib.org/1.3.1/users/text_props.html
    #
    for e in zip( [1,2,3,4,5], [s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5] )
        ↪ :
        ax.text( e[0], e[1]-0.1, str(e[1]), horizontalalignment
            ↪ ='center', verticalalignment='top')

    #grid(true)
    return plt
```

A.3.8 Mediana e diagrama de caule-e-folhas

E97k40_mediana_caulefolhas_001

%SUMMARY Medidas de localização; Mediana e diagrama de caule-e-folhas

Este exercício pretende aplicar as definições de mediana.

SIACUAstart

level=1

slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(5423, 0.5),(5411,0.5)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

Numa zona industrial estão instaladas várias empresas.

A distribuição
do número de empregados pelas diversas empresas é apresentada no diagrama de caule-e-folhas que se segue.

stem1

A mediana do número de empregados por empresa é:

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresposta$$ </choice>

<choice> $$errada1$$ </choice>

<choice> $$errada2$$ </choice>

<choice> $$errada3$$ </choice>

</multiplechoice>

Como há nn empresas, que é
um número casmedian@c{"par","ímpar"}, então a mediana

<showone casmedian>

<thisone> é igual à média do número de empregados das empresas que ocupam os dois valores centrais (posic2º e posic3º), ou seja, $$\tilde{x}=\frac{posicao2+posicao3}{2}=vresposta \quad empregados$$.</thisone> <thisone> é igual ao número de empregados da empresa que ocupa a posição central, a posicao1ª posição. Ou seja, $$\tilde{x}= vresposta \quad empregados$$.</thisone>

</showone>

Programação

```
class E97k40_mediana_caulefolhas_001(Exercise):


    #   s.stem1 = r_stem( [ur.runif(1,10,2) for _ in range(30)] )
    #   s.stem2 = r_stem( [ur.runif(0,1,2) for _ in range(30)] )
    #   s.stem3 = r_stem( [ur.runif(100,200,2) for _ in range(30)] )
    def mesmo(s,constante,quantidade):
        #cria lista com uma dada quantidade de constante.
        return [ constante for i in range(quantidade)]

    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(15,20)
        s.lista1=[ur.iunif(10,30) for i in range (s.nn)]
        print s.lista1
        s.listao= sorted(s.lista1)
        s.mediana1=median(s.lista1)
        s.casmedian=ur.iunif(0,1)
        if is_odd(s.nn):
            s.posicao1=(s.nn+1)/2
            s.casmedian=1
        else:
            s.posicao2=s.listao[(s.nn/2)-1]
            s.posic2=(s.nn/2)
            s.posicao3=s.listao[s.nn/2]
```

```
            s.posic3=s.posic2+1
            s.casmedian=0

        s.stem1 = r_stem( s.lista1 )

    def solve(s):

        if is_odd(s.nn):
            s.vresposta = s.mediana1
        else:
            #if ((s.posicao2+s.posicao3)/2)%2==0:
            if mod( (s.posicao2+s.posicao3), 2)==0:
                s.vresposta=round(s.mediana1,0)
            else:
                s.vresposta=round(s.mediana1,1)
        #Opcoes Erradas
        if is_odd(s.nn):
            if s.vresposta==s.lista1[((s.nn+1)/2)-1]:
                s.errada1=s.lista1[((s.nn+1)/2)]
            else:
                s.errada1=s.lista1[((s.nn+1)/2)-1]
        else:
            if mod((s.lista1[(s.nn/2)-1]+s.lista1[((s.nn/2)-1)+1])
                ↪ ,2)==0:
                s.errada1=round((s.lista1[(s.nn/2)-1]+s.lista1[((s.
                    ↪ nn/2)-1)+1])/2,0)
            else:
                s.errada1=round((s.lista1[(s.nn/2)-1]+s.lista1[((s.
                    ↪ nn/2)-1)+1])/2,1)

        s.errada2=min(s.lista1)
        s.errada3=max(s.lista1)
```

A.3.9 Moda

E97k40_moda_002

%SUMMARY Medidas de localização; Moda

Este exercício pretende calcular a moda de um conjunto de dados.

SIACUAstart

level=1

slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(5422, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

Considera o seguinte conjunto de dados $$lvalores2$$

Indique, caso exista, a moda.

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresposta$$ </choice>

<choice> $$errada1$$ </choice>

<choice> $$errada2$$ </choice>

<choice> $$errada3$$</choice>

</multiplechoice>

A resposta é $vresposta$.

A moda é o valor que se repete mais vezes: $vresposta$ repete-se $c1$ vezes.

Programação

```
class E97k40_moda_002(Exercise):


    def make_random(s):
```

```
s.nn= ur.iunif(10,16)# de 10 a dezasseis para garantir a
    ↪ repeticao de elementos
s.lvalores=[ur.iunif(0,9) for i in range(s.nn)]

# A lista lvalores contem numeros repetidos porque
# sao gerados entre 0 e 9 e a lista
# tem entre 10 e 16 numeros
# mas pode ter varia modas.

s.mode_list= mode(s.lvalores)

#print s.mode_list

if len(s.mode_list)>1:
    #
    #Se existir mais que um valor modal entao insere
    #um deles para que so haja uma moda.
    #
    s.errada1=s.mode_list[1]
    i = ZZ.random_element( s.nn ) #gera indice aleatorio: 0
        ↪ --- n-1
    s.lvalores.insert( i, s.mode_list[0])
    s.mode_list=mode(s.lvalores)
else:
    #Caso em que nao existe mais que um valor modal.
    s.errada1=ur.iunif_nonset(0,9,[s.mode_list[0]])

s.c1=s.lvalores.count(s.mode_list[0])
s.vresposta=s.mode_list[0]

#==========================================================
#O texto em "lvalores2" contem a moda adicional.
```

```
        #Este codigo deve ficar no fim para incluir
        #o novo elemento inserido.
        #==========================================================
        valores_string=[str(x) for x in s.lvaloros]
        s.lvalores2=r'\{'+','.join(valores_string)+r'\}'

    def solve(s):

        #Opcoes Erradas
        s.errada2 =ur.iunif_nonset(0,9,[s.vresposta,s.errada1])

        s.errada3=ur.iunif_nonset(0,9,[s.vresposta,s.errada1,s.
            ↪ errada2])
```

A.3.10 Moda e tabela de frequências

E97k40_moda_tabelas_001

%SUMMARY Medidas de localização; Moda e tabelas de frequências

```
Com este exercício pretende-se determinar a moda, estando os dados
organizados numa tabela.



   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5422,0.5),(5411,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Na tabela seguinte estão representados os resultados a Matemática dos a1
alunos de uma turma do 7°ano.
```

```
<table border="1">
<tr align="center">
<td> nível </td> <td> número de alunos </td> </tr>
<tr align= "center">
<td> $v1$ </td> <td> $fa1$ </td> </tr>
<tr align= "center"> <td> $v2$ </td>
<td> $fa2$ </td> </tr>
<tr align= "center"> <td> $v3$ </td> <td> $fa3$ </td>
</tr>
<tr align= "center"> <td> $v4$ </td> <td> $fa4$ </td> </tr>
<tr
align= "center"> <td> $v5$ </td> <td> $fa5$ </td> </tr>
</table>

A moda dos níveis atribuídos aos alunos da turma é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
<choice> $$vresposta$$ </choice>
<choice> $$errada1$$ </choice>
<choice> $$errada2$$ </choice>
<choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>
```

Relativamente aos níveis atribuídos na disciplina de Matemática, concluiu-se que a moda é vresposta pois é o nível que a maioria dos alunos obteve.

Programação

```
class E97k40_moda_tabelas_001(Exercise):


        def mesmo(s,constante,quantidade):
```

```
    #cria lista com uma dada quantidade de constante.
    return [ constante for i in range(quantidade)]

def make_random(s):

    s.v1= 1
    s.v2=s.v1+1
    s.v3=s.v2+1
    s.v4=s.v3+1
    s.v5=s.v4+1
    s.a1= ur.iunif(25,30)
    s.fa1= ur.iunif(1,3)
    s.a2=s.a1-s.fa1
    s.partition_element=Partitions(s.a2,length=4).random_element
        ↪ ()

    while s.partition_element[0]==s.partition_element[1]:  #pelo
        ↪  menos duas modas
        s.partition_element=Partitions(s.a2,length=4).
            ↪ random_element()
        #pode ocorrer ciclo infinito!!!

    #print s.partition_element

def solve(s):
    lista=list(s.partition_element)
    shuffle(lista)

    s.fa2 = lista[0]
    s.fa3 = lista[1]
    s.fa4 = lista[2]
    s.fa5 = lista[3]
```

```
        s.amostra1=s.mesmo(s.v1,s.fa1)+s.mesmo(s.v2,s.fa2)+s.mesmo(s
            ↪ .v3,s.fa3)+s.mesmo(s.v4,s.fa4)+s.mesmo(s.v5,s.fa5)

        s.moda1=mode(s.amostra1)[0]
        #print s.moda1

        s.vresposta = s.moda1

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta])
        if s.vresposta==max([s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5]):
            s.errada2=ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta,s.errada1])
            s.errada3 = ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta,s.errada1,s
                ↪ .errada2])
        else:
            s.errada2 = max([s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5])
            s.errada3 = ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta,s.errada1])
```

A.3.11 Moda e gráfico de barras

E97k40_grafico_modaversao2_001

%SUMMARY Medidas de localização; Moda e gráfico de barras

```
Este exercício pretende determinar a moda, estando os dados apresentados
sob a forma de gráfico

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5422,0.5),(5412,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Foi realizado um questionário acerca do número de televisões que cada um
dos alunos de uma turma tem em casa. Todos os alunos da turma responderam ao
questionário. Na figura  está representado o gráfico correspondente aos dados
recolhidos. Relativamente ao número de televisores, a moda é:

   <center>
     fig1
   </center>
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A moda, relativa ao número de televisores,
é vresposta. A maioria dos alunos da turma respondeu ter vresposta televisores.
```

Programação

```
class E97k40_grafico_modaversao2_001(Exercise):

        def make_random(s):
             s.nn=ur.iunif(17,22)
             partition_element=Partitions(s.nn,length=5).random_element()

             #Pede outra particao ate que se evitem duas modas:
             while partition_element[0]==partition_element[1]:   #pelo
                 ↪ menos duas modas
                  partition_element=Partitions(s.nn,length=5).
                      ↪ random_element()
```

```
            #pode ocorrer ciclo infinito!!!
        #print partition_element
        lista=list(partition_element)
        shuffle(lista)
        s.fa1 = lista[0]
        s.fa2 = lista[1]
        s.fa3 = lista[2]
        s.fa4 = lista[3]
        s.fa5 = lista[4]

        s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(), "fig1", dimx=10, dimy
            ↪ =10)

    def solve(s):
        #Assumir que so ha uma moda
        lista = [s.fa1, s.fa2, s.fa3, s.fa4, s.fa5]
        s.moda1 = max( lista )
        s.vresposta = lista.index(s.moda1) + 1

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta])
        if s.vresposta==max([s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5]):
            s.errada2=ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta,s.errada1])
            s.errada3 = ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta,s.errada1,s
                ↪ .errada2])
        else:
            s.errada2 = max([s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5])
            s.errada3 = ur.iunif_nonset(1,5,[s.vresposta,s.errada1])
    def barras(s):
        import numpy as np
        import matplotlib.pylab as plt
        fig,ax = plt.subplots()
```

```
    pos=np.arange(5) #pedro: porque os ticks aparecem nos meios
        ↪ 0.5
    ax.bar([1,2,3,4,5],(s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5),align='
        ↪ center',color='#b8ff5c')
    ax.set_xticks([1,2,3,4,5])
    ax.set_xticklabels(('1','2','3','4','5'))
    ax.set_xlabel(u'numero de televisores')
    ax.set_ylabel(u'No de alunos')
    ax.set_title(u'Quantidade de televisores')

    #
    # Exemplos explicativos aqui:
    #
    #  http://matplotlib.org/1.3.1/users/text_props.html
    #
    for e in zip( [1,2,3,4,5], [s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5] )
        ↪ :
        ax.text( e[0], e[1]-0.1, str(e[1]), horizontalalignment
            ↪ ='center', verticalalignment='top')
    #grid(true)
    return plt
```

A.3.12 Quartis

E97k40_quartis_001

%SUMMARY Medidas de localização; Quartis

```
Este exercício pretende calcular os quartis de um conjunto de dados.
Neste exercício, não  se considera a mediana para o calculo dos quartis.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
```

```
   concepts = [(5423,1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Considera o seguinte conjunto de dados {v1, v2, v3,v4,v5,v6,v7, v8,v9, v10}.
<br> O 1º e o 3º quartis são respetivamente:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$Q_{1}=vresposta1\quad\quad
Q_{3}=vresposta2$$</choice>
   <choice> $$Q_{1}=errada1_q1\quad\quad
Q_{3}=errada1_q3$$</choice>
   <choice> $$Q_{1}=errada2_q1\quad\quad
Q_{3}=errada2_q3$$</choice>
   <choice> $$Q_{1}=errada3_q1\quad\quad
Q_{3}=errada3_q3$$</choice>
   </multiplechoice>


   A resposta é
$Q_1=vresposta1$ e $Q_3vresposta2$.<br>
   1º: Devemos ordenar os dados:
$$lvalores1$$
   2º: Determinar a mediana:<br> A mediana é
$$\frac{lvo4+lvo5}{2}=lmediana$$ divide o conjunto dos  dados em duas partes
(cada parte com o mesmo nº de dados).
       $$listamediana$$
   3º: Determinar $Q_{1}$ (1º quartil):
   <br> Considera-se a 1ª parte (dados à esquerda
da mediana): $$lm$$ Calcula-se a mediana, que é vresposta1. Logo
$Q_{1}=vresposta1$.<br><br>
   4º: Determinar $Q_{3}$ (3º quartil):<br>
considera-se a 2ª parte (dados à esquerda da mediana): $$ldireita$$ Calcula-se a
```

mediana, que é vresposta2. Logo $Q_{3}=vresposta2$.

Programação

```
class E97k40_quartis_001(Exercise):
    #http://www.sagemath.org/doc/reference/stats/sage/stats/
        ↪ basic_stats.html
    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(0,20)
        s.v2 = ur.iunif(0,20)
        s.v3 = ur.iunif(0,20)
        s.v4 = ur.iunif(0,20)
        s.v5 = ur.iunif(0,20)
        s.v6= ur.iunif(0,20)
        s.v7= ur.iunif(0,20)
        s.v8= ur.iunif(0,20)
        s.v9= ur.iunif(0,20)
        s.v10= ur.iunif(0,20)

    def solve(s):
        s.lvalores=[s.v1,s.v2,s.v3,s.v4,s.v5,s.v6,s.v7,s.v8,s.v9,s.
            ↪ v10]
        s.lvaloresordenado=sorted(s.lvalores)
        valores_string=[str(x)for x in s.lvaloresordenado]
        s.lvalores1=r'\{'+','.join (valores_string) + r'\}'
        s.lmediana= median(s.lvaloresordenado)
        lvo=s.lvaloresordenado
        s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(5)],sep
            ↪ ='\quad' ) + r'\quad|\quad' + join( [str(lvo[5+i]) for
            ↪  i in range(5)],sep='\quad')

        s.lm  =  str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+str(
            ↪ lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3]) + r'\quad'+str(lvo[4])
        s.ldireita= str(lvo[5]) + r'\quad' + str(lvo[6])+ r'\quad'+
```

```
    ↪ str(lvo[7]) + r'\quad'+str(lvo[8]) + r'\quad'+str(lvo
    ↪ [9])

s.lvo4 = lvo[4]
s.lvo5 = lvo[5]

s.vresposta1 =s.lvaloresordenado[2]
s.vresposta2 =s.lvaloresordenado[7]

#Opcoes Erradas
# determinar os quartis sem o conjunto estar ordenado
# trocar o q1 pelo q3
#trocar o q1 pela mediana, garantir que a mediana nao
    ↪ coincide com o q1 - melhorar!!!!
if s.vresposta1<>s.lvalores[2]:
    s.errada1_q1= s.lvalores[2]
else:
    s.errada1_q1= s.lvalores[2]-1
if s.vresposta2<>s.lvalores[7]:
    s.errada1_q3= s.lvalores[7]
else:
    s.errada1_q3= s.lvalores[7]-1
s.errada2_q1= s.vresposta2
s.errada2_q3= s.vresposta1
if s.vresposta1<> s.lmediana:
    s.errada3_q1= median(s.lvalores)
else:
    s.errada3_q1= median(s.lvalores)-1
s.errada3_q3= s.vresposta2
```

E97k40_quartis_002

%SUMMARY Medidas de localização; Quartis

`Este exercício pretende calcular os quartis de um conjunto de dados.`

```
Nota: Em amostras de dimensão ímpar, a mediana não é tida em conta no cálculo do
$Q_{1}$ e do $Q_{3}$.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5423,1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Considera o seguinte conjunto de dados: $$lvalores1$$
   $Q_{1}$(1º
quartil) e $Q_{3}$ (3º quartil) são respetivamente:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$Q_{1}=vresposta_q1\quad\quad
Q_{3}=vresposta_q3$$</choice>
   <choice> $$Q_{1}=errada1_q1\quad\quad
Q_{3}=errada1_q3$$</choice>
   <choice> $$Q_{1}=errada2_q1\quad\quad
Q_{3}=errada2_q3$$</choice>
   <choice> $$Q_{1}=errada3_q1\quad\quad
Q_{3}=errada3_q3$$</choice>
   </multiplechoice>

   A resposta é
$vresposta_q1\quad e\quad vresposta_q3$.<br>
   1º: devemos ordenar os dados:
$$lvalores2$$
   2º: determinar a mediana:<br> A mediana é lmediana, divide o
```

conjunto dos dados em duas partes (cada parte com o mesmo nº de dados).

$$ listamediana $$

3º: determinar Q_{1} (1º quartil):

 Considera-se a 1ª parte (dados à esquerda da mediana): $$lm$$ Calcula-se a mediana, que é vresposta_q1. Logo $Q_{1}= vresposta_q1$.

4ºdeterminar Q_{3} (3º quartil):
 considera-se a 2ª parte (dados à esquerda da mediana): $$ldireita$$ Calcula-se a mediana, que é vresposta_q3. Logo $Q_{3}=vresposta_q3$.

Programação

```
class E97k40_quartis_002(Exercise):
    #http://www.sagemath.org/doc/reference/stats/sage/stats/
        ↪ basic_stats.html
    def make_random(s):
        s.nn=ur.iunif(10,15)
        s.lvalores=[ur.iunif(0,10)for i in range(s.nn)]
        valores_string=[str(x) for x in s.lvalores]
        s.lvalores1=r'\{'+','.join (valores_string)+r'\}'
        s.lvaloresordenados= sorted(s.lvalores)
        valores_string1=[str(x)for x in s.lvaloresordenados]
        s.lvalores2=r'\{'+','.join(valores_string1)+r'\}'
        s.lmediana=median(s.lvalores)
        #print s.lvalores

    def solve(s):
        #nome curto
        lvo = s.lvaloresordenados

        s.caso = s.nn-10

        if s.nn==10:
            s.vresposta_q1=s.lvaloresordenados[2]
```

```
        s.vresposta_q3=s.lvaloresordenados[7]
        s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(5)],
           ↪ sep='\quad' ) + r'\quad|\quad' + join( [str(lvo[5+
           ↪ i]) for i in range(5)],sep='\quad' )
        s.lm = str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+
           ↪ str(lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3]) + r'\quad'+str(
           ↪ lvo[4])
        s.ldireita= str(lvo[5]) + r'\quad' + str(lvo[6])+ r'\
           ↪ quad'+str(lvo[7]) + r'\quad'+str(lvo[8]) + r'\quad
           ↪ '+str(lvo[9])

    elif s.nn==11:
        s.vresposta_q1=s.lvaloresordenados[2]
        s.vresposta_q3=s.lvaloresordenados[8]
        s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(5)],
           ↪ sep='\quad' ) + (r"\quad\underbrace{%d}_{\text{med
           ↪ }}\quad" % lvo[5]) + join( [str(lvo[6+i]) for i in
           ↪  range(5)],sep='\quad' )
        s.lm = str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+
           ↪ str(lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3]) + r'\quad'+str(
           ↪ lvo[4])
        s.ldireita= str(lvo[6]) + r'\quad' + str(lvo[7])+ r'\
           ↪ quad'+str(lvo[8]) + r'\quad'+str(lvo[9]) + r'\quad
           ↪ '+str(lvo[10])
    elif s.nn==12:
        s.vresposta_q1=(s.lvaloresordenados[2]+s.
           ↪ lvaloresordenados[3])/2
        s.vresposta_q3=(s.lvaloresordenados[8]+s.
           ↪ lvaloresordenados[9])/2
        s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(6)],
           ↪ sep='\quad' ) + r'\quad|\quad' + join( [str(lvo[6+
           ↪ i]) for i in range(6)],sep='\quad' )
        s.lm = str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+
```

```
            ↪ str(lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3]) + r'\quad'+str(
            ↪ lvo[4])+r'\quad'+str(lvo[5])
        s.ldireita= str(lvo[6]) + r'\quad' + str(lvo[7])+ r'\
            ↪ quad'+str(lvo[8]) + r'\quad'+str(lvo[9]) + r'\quad
            ↪ '+str(lvo[10])+ r'\quad'+str(lvo[11])
    elif s.nn==13:
        s.vresposta_q1=(s.lvaloresordenados[2]+s.
            ↪ lvaloresordenados[3])/2
        s.vresposta_q3=(s.lvaloresordenados[9]+s.
            ↪ lvaloresordenados[10])/2
        s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(6)],
            ↪ sep='\quad' ) + (r"\quad\underbrace{%d}_{\text{med
            ↪ }}\quad" % lvo[6]) + join( [str(lvo[7+i]) for i in
            ↪  range(6)],sep='\quad' )
        s.lm = str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+
            ↪ str(lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3]) + r'\quad'+str(
            ↪ lvo[4])+r'\quad'+str(lvo[5])
        s.ldireita= str(lvo[7]) + r'\quad' + str(lvo[8])+ r'\
            ↪ quad'+str(lvo[9]) + r'\quad'+str(lvo[10]) + r'\
            ↪ quad'+str(lvo[11])+ r'\quad'+str(lvo[12])
    elif s.nn==14:
        s.vresposta_q1=s.lvaloresordenados[3]
        s.vresposta_q3=s.lvaloresordenados[10]
        s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(7)],
            ↪ sep='\quad' ) + r'\quad|\quad' + join( [str(lvo[7+
            ↪ i]) for i in range(7)],sep='\quad' )
        s.lm = str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+
            ↪ str(lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3])+r'\quad'+str(
            ↪ lvo[4])+r'\quad'+str(lvo[5])+r'\quad'+str(lvo[6])
        s.ldireita= str(lvo[7]) + r'\quad' + str(lvo[8])+ r'\
            ↪ quad'+str(lvo[9]) + r'\quad'+str(lvo[10]) + r'\
            ↪ quad'+str(lvo[11])+ r'\quad'+str(lvo[12])+ r'\quad
            ↪ '+str(lvo[13])
```

```
        else: #aqui e' apenas um comentario s.nn =15
            s.vresposta_q1=s.lvaloresordenados[3]
            s.vresposta_q3=s.lvaloresordenados[11]
            s.listamediana = join( [str(lvo[i]) for i in range(7)],
                ↪ sep='\quad' ) + (r"\quad\underbrace{%d}_{\text{med
                ↪ }}\quad" % lvo[7]) + join( [str(lvo[8+i]) for i in
                ↪  range(7)],sep='\quad' )
            s.lm  =  str(lvo[0]) + r'\quad' + str(lvo[1])+ r'\quad'+
                ↪ str(lvo[2]) + r'\quad'+str(lvo[3])+r'\quad'+str(
                ↪ lvo[4])+r'\quad'+str(lvo[5])+r'\quad'+str(lvo[6])
            s.ldireita= str(lvo[8]) + r'\quad' + str(lvo[9])+ r'\
                ↪ quad'+str(lvo[10]) + r'\quad'+str(lvo[11]) + r'\
                ↪ quad'+str(lvo[12])+ r'\quad'+str(lvo[13])+ r'\quad
                ↪ '+str(lvo[14])

        #A fazer: Opcoes Erradas
        s.errada1_q1= s.vresposta_q1 #TODO:garantir que este valor
            ↪ nao coincide com o correto
        s.errada1_q3= s.lmediana
        s.errada2_q1= s.vresposta_q3
        s.errada2_q3= s.vresposta_q1
        s.errada3_q1= s.lmediana
        s.errada3_q3= s.vresposta_q3
```

A.4 Medidas de dispersão

A.4.1 Amplitude

E97k40_amplitude_001

%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude

`Este exercício pretende calcular a amplitude de um conjunto de dados.`

`SIACUAstart`

```
level=1
slip=0.2
guess=0.25
discr=0.3
concepts = [(5431,1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Considera o seguinte conjunto de dados: $$lvalores1$$
A amplitude de dados é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A amplitude de dados é a diferença entre o
máximo e o mínimo da distribuição, ou seja é $$M1 -m1=vresposta$$.
```

Programação

```
class E97k40_amplitude_001(Exercise):

    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(10,20)
        s.lvalores = [ur.iunif(0,20)for i in range(s.nn)]
        valores_string=[str(x)for x in s.lvalores]
        s.lvalores1=r'\{'+','.join (valores_string)+r'\}'
        s.M1 = max(s.lvalores)
        s.m1 = min(s.lvalores)
```

```
    def solve(s):

        s.vresposta =s.M1-s.m1

        #Opcoes Erradas

        s.errada1 =s.vresposta-1

        s.errada2 = s.m1
        if median(s.lvalores)<>s.errada1:
            s.errada3 =median(s.lvalores)
        else:
            s.errada3=median(s.lvalores)+1
```

A.4.2 Amplitude e tabela de frequências

E97k40_amplitude_tabelas_001

%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude

```
Este exercício pretende determinar a amplitude de um conjunto de
dados, estando estes organizados sob a forma de tabela.



   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5411,0.5),(5431,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Um teste com n1 questões, intitulado Cultura Geral sobre  a Europa , foi
```

aplicado a um grupo de alunos.

No final, registou-se o número de questões
erradas por cada aluno e construiu-se a seguinte tabela:

<table
border="1">

<tr> <td> $nº\quad de\quad respostas \quad erradas$ </td> <td>
$nº\quad de\quad alunos$</td> </tr>

<tr align = "center"> <td> e1 </td>
<td> fa1 </td> </tr>

<tr align = "center"> <td> e2 </td> <td> fa2 </td> </tr>
<tr align = "center"> <td> e3 </td> <td> fa3 </td> </tr>

<tr align =
"center"> <td> e4 </td> <td> fa4 </td> </tr>

<tr align = "center"> <td> e5
</td> <td> fa5 </td> </tr>

<tr align = "center"> <td> e6 </td> <td> fa6 </td>
</tr>

<tr align = "center"> <td> e7 </td> <td> fa7 </td> </tr>

</table>
Em relação ao conjunto de dados apresentado, a amplitude de dados é:

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresposta$$ </choice>

<choice> $$errada1$$ </choice>

<choice> $$errada2$$ </choice>

<choice> $$errada3$$ </choice>

</multiplechoice>

Como a amplitude de dados é a diferença
entre o valor máximo e o valor mínimo e sendo o mínimo de respostas erradas $e1$
e o máximo $e7$, então a amplitude = $e7-e1$= $vresposta$.

Programação

```
class E97k40_amplitude_tabelas_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.n1=ur.iunif(20,30)
        s.e1=ur.iunif(0,3)
        s.e2=s.e1+1
        s.e3=s.e2+1
        s.e4=s.e3+1
        s.e5=s.e4+1
        s.e6=s.e5+1
        s.e7=s.e6+1
        partition_element=Partitions(s.n1, length=7).random_element
            ↪ ()
        lista=list(partition_element)
        shuffle(lista)
        s.fa4=lista[3]
        s.fa3=lista[2]
        s.fa1=lista[0]
        s.fa2=lista[1]
        s.fa5=lista[4]
        s.fa6=lista[5]
        s.fa7=lista[6]
        s.max=max(lista)
        s.min=min(lista)
        s.amplt=s.e7-s.e1

    def solve(s):
        s.vresposta =s.amplt

        #Opcoes Erradas
        if s.max==s.e7:
            s.errada1= (s.max-1)-s.min
```

```
        else:
            s.errada1=s.max-s.min
        if  s.e1<>0:
            s.errada2= s.e7+s.e1
        else:
            s.errada2= s.e7+s.e2

        s.errada3 =round((s.e7-s.e1)/2,0)
```

A.4.3 Amplitude e gráfico de barras

E97k40_amplitude_grafico_001

%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude e gráfico de barras

```
Este exercício pretende determinar a amplitude, estando os dados
apresentados sob a forma de gráfico de barras

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5412,0.5),(5431,0.5)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Numa campanha de saúde oral junto das escolas, uma equipa do centro de
saúde observou o número de caries de nn alunos, tendo-se representado os dados
através de um gráfico de barras.<br> Indica a amplitude do conjunto de dados.
<center>
   fig1
</center>
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>


   A amplitude de dados é a diferença entre o
número máximo e o número mínimo de cáries, ou seja, m5-m1=vresposta.
```

Programação

```
class E97k40_amplitude_grafico_001(Exercise):

        def make_random(s):
            s.nn=ur.iunif(20,40)
            partition_element=Partitions(s.nn,length=5).random_element()
            lista=list(partition_element)
            shuffle(lista)
            s.fa1 = lista[0]
            s.fa2 = lista[1]
            s.fa3 = lista[2]
            s.fa4 = lista[3]
            s.fa5 = lista[4]
            s.m1=ur.iunif(0,3)
            s.m2=s.m1+1
            s.m3=s.m2+1
            s.m4=s.m3+1
            s.m5=s.m4+1
            s.max1= max(lista)
            s.min1=min(lista)
            s.dif1=s.max1-s.min1

            s.fig1 = s.sage_graphic( s.barras(), "fig1", dimx=10, dimy
```

```
            ↪ =10)

    def solve(s):
        s.vresposta=s.m5-s.m1
        #Opcoes Erradas
        if s.vresposta==s.m5:
            s.errada1= s.m1
            s.errada2=s.m5-1
            if s.dif1<>s.errada2:
                s.errad3=s.dif1
            else:
                s.errada3=s.m5-2

        else:
            s.errada1= s.m1
            s.errada2=s.m5
            if s.dif1<>s.vresposta:
                s.errada3=s.dif1
            else:
                s.errada3=s.vresposta-1

    def barras(s):
        import numpy as np
        import matplotlib.pylab as plt
        fig,ax = plt.subplots()

        pos=np.arange(5) #porque os ticks aparecem nos meios 0.5
        ax.bar([s.m1,s.m2,s.m3,s.m4,s.m5],(s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s
            ↪ .fa5),align='center',color='#b8ff5c')
        ax.set_xticks([s.m1,s.m2,s.m3,s.m4,s.m5])
        ax.set_xticklabels([s.m1,s.m2,s.m3,s.m4,s.m5])
        ax.set_xlabel(u'N ode caries')
        ax.set_ylabel(u'No de alunos')
```

```
        ax.set_title(u'Caries')

        #
        # Exemplos explicativos aqui:
        #
        #  http://matplotlib.org/1.3.1/users/text_props.html
        #
        for e in zip( [s.m1,s.m2,s.m3,s.m4,s.m5], [s.fa1,s.fa2,s.fa3
            ↪ ,s.fa4,s.fa5] ):
            ax.text( e[0], e[1]-0.1, str(e[1]), horizontalalignment
                ↪ ='center', verticalalignment='top')
        #grid(true)
        return plt
```

A.4.4 Amplitude e diagrama de caule-e-folhas

E97k40_amplitude_caulefolhas_001

%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude e diagrama de caule-e-folhas

```
Este exercício pretende aplicar as definições amplitude de dados.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5412,0.5),(5431,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
O administrador de um condomínio registou as idades de todos os
condóminos no diagrama de caule folhas que se apresenta.
     stem1
A amplitude de dados é :
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>


   A amplitude  é igual à diferença
entre a idade da pessoa mais velha e a idade da pessoa mais nova, ou seja
max1-min1=vresposta
```

Programação

```
class E97k40_amplitude_caulefolhas_001(Exercise):
    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(15,30)
        s.lista1=[ur.iunif(1,55) for i in range (s.nn)]
        #print s.lista1

        s.mediana1=median(s.lista1)

        s.max1=max(s.lista1)
        s.min1=min(s.lista1)

        s.stem1 = r_stem( s.lista1 )

    def solve(s):
        s.vresposta=s.max1-s.min1
        #Opcoes Erradas
        s.errada1=s.vresposta+1
        if s.errada1==s.max1:
            s.errada2=s.min1
        else:
            s.errada2=s.max1
```

```
        s.errada3=s.vresposta-1
```

A.4.5 Amplitude interquartil

E97k40_amplitude_quartis_001

```
%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude interquartil

Este exercício pretende calcular a amplitude interquartil de um
conjunto de dados.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5431,1)]
   SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

Determina a amplitude interquartil do seguinte conjunto de dados:
$$lvalores1$$


%ANSWER

<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A resposta é $vresposta$. <br>
   A amplitude interquartil é igual à diferença entre o 3º e o 1º quartis
   ($Q_{3} - Q_{1}$). <br>Então para determinar a amplitude interquartil
```

temos que seguir os seguintes passos:

1º Ordenar os dados por ordem crescente ou decrescente:$$lo1$$

2º Determinar a mediana da amostra: como neste conjunto há nn elementos, que é um número casmedian@c{"par","ímpar"}, então a mediana é lmediana, porque

<showone casmedian>

<thisone> é igual à média dos dois valores centrais (posic2º e posic3º), ou seja, $$\tilde{x}=\frac{posicao2+posicao3}{2}=lmediana$$.</thisone>

<thisone> é o valor que ocupa a posição central, que neste caso é $posicao1$ª posição.</thisone>

</showone>

3º Determinar o 1º quartil, que é vquartil1, porque é a mediana dos dados que se encontram à esquerda da mediana.
4º Determinar o 3º quartil, que é vquartil3, porque é a mediana dos dados que se encontram à direita da mediana.

 5º Calcular a amplitude interquartil: $Q_{3}-Q_{1}= vquartil3-vquartil1=vresposta$

Programação

```
class E97k40_amplitude_quartis_001(Exercise):

    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(8,20)
        s.lvalores=[ur.iunif(0,15)for i in range(s.nn)]
        valores_string=[str(x) for x in s.lvalores]
        s.lvalores1=r'\{'+','.join(valores_string)+r'\}'
        s.lo=sorted(s.lvalores)
        s.valores_string1=[str(x) for x in s.lo]
        s.lo1=r'\{'+','.join(s.valores_string1)+r'\}'
        s.lmediana=median(s.lvalores)
```

```
        s.casmedian=ur.iunif(0,1)
        s.max1=max(s.lo)
        s.min1=min(s.lo)
        if is_odd(s.nn):
            s.posicao1=(s.nn+1)/2
            s.casmedian=1
        else:
            s.posicao2=s.lo[(s.nn/2)-1]
            s.posic2=(s.nn/2)
            s.posicao3=s.lo[s.nn/2]
            s.posic3=s.posic2+1
            s.casmedian=0
            if mod(s.posicao2+s.posicao3,2)==0:
                s.lmediana= round(median(s.lvalores),0)
            else:
                s.lmediana= round(median(s.lvalores),1)
        if mod(s.nn,4)==0:
            if mod(s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4],2)==0:
                s.vquartil1=round((s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])
                    ↪ /2,0)
            else:
                s.vquartil1=round((s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])
                    ↪ /2,1)
            if mod(s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn)/4],2)==0:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn
                    ↪ )/4])/2,0)
            else:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn
                    ↪ )/4])/2,1)
        elif mod(s.nn,4)==1:
            if mod(s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn+3)/4) -1],2)==0:
                s.vquartil1=round((s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn
                    ↪ +3)/4) -1])/2,0)
```

```
            else:
                s.vquartil1=round((s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn
                    ↪ +3)/4)-1])/2,1)
            if mod(s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s.nn+5)/4)-1],2)
                ↪ ==0:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s
                    ↪ .nn+5)/4)-1])/2,0)
            else:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s
                    ↪ .nn+5)/4)-1])/2,1)
        elif mod(s.nn,4)==2:
            s.vquartil1=s.lo[((s.nn+2)/4)-1]
            s.vquartil3=s.lo[((3*s.nn+2)/4)-1]
        else:
            s.vquartil1=s.lo[((s.nn+1)/4)-1]
            s.vquartil3=s.lo[((3*s.nn+3)/4)-1]
    def solve(s):
        s.vresposta=s.vquartil3-s.vquartil1
        #Opcoes Erradas
        s.errada1=s.vresposta+1
        if s.lmediana<>s.vquartil1:
            s.errada2=s.lmediana-s.vquartil1
        else:
            s.errada2=s.vquartil3-s.lmediana
        s.errada3 = s.max1-s.min1
```

A.4.6 Amplitude interquartil e diagrama de caule-e-folhas

E97k40_amplitude_interquartis_caulefolhas_001

%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude interquartil e diagrama de caule-e-folhas

`Este exercício pretende aplicar as definições amplitude interquartil.`

`SIACUAstart`

```
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5412,0.5),(5431,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Num determinado dia, no serviço de pediatria de um hospital, foram
observadas crianças com idade inferior a três anos. O registo das idades, em
meses, foi organizado através do diagrama de caule e folhas.
         stem1
A amplitude interquartil das idades das crianças observadas é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice> $$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A resposta é $vresposta$.<br>
   A amplitude interquartil é igual à diferença entre o 3º e o 1º quartis
   ($Q_{3} -Q_{1}$).<br>
    Então para determinar a amplitude interquartil temos que seguir os
seguintes passos:<br><br>

       1º: determinar a mediana da amostra:
como neste conjunto há nn elementos, que é um número casmedian@c{"par","ímpar"},
então a mediana é mediana1, porque
   <showone       casmedian>
   <thisone> é
```

igual à média dos dois valores centrais (posic2º e posic3º), ou seja,

$$\tilde{x}=\frac{posicao2+posicao3}{2}=mediana1$$.</thisone>

<thisone> é o

valor que ocupa a posição central, que neste caso é $posicao1$ª

posição.</thisone>

</showone>

2º: determinar o 1º quartil, $Q_{1}=

vquartil1$, porque é a mediana dos dados que se encontram à esquerda da

mediana.

 3º: determinar o 3º quartil, $Q_{3}= vquartil3$, porque

é a mediana dos dados que se encontram à direita da mediana.

4º:

Calcular a amplitude interquartil: $Q_{3}-Q_{1}=vquartil3-vquartil1=vresposta$

Programação

```
class E97k40_amplitude_interquartis_caulefolhas_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(15,30)
        s.lista1=[ur.iunif(1,36) for i in range (s.nn)]
        print s.lista1
        s.lo= sorted(s.lista1)
        s.mediana1=median(s.lista1)
        s.casmedian=ur.iunif(0,1)
        s.max1=max(s.lista1)
        s.min1=min(s.lista1)
        if is_odd(s.nn):
            s.posicao1=(s.nn+1)/2
            s.casmedian=1
        else:
            s.posicao2=s.lo[(s.nn/2)-1]
            s.posic2=(s.nn/2)
            s.posicao3=s.lo[s.nn/2]
```

```
            s.posic3=s.posic2+1
            s.casmedian=0
            if mod(s.posicao2+s.posicao3,2)==0:
                s.mediana1=round(s.mediana1,0)
            else:
                s.mediana1=round(s.mediana1,1)

        if mod(s.nn,4)==0:
            s.vquartil1=(s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])/2
            s.vquartil3=(s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn)/4])/2
        elif mod(s.nn,4)==1:
            s.vquartil1=(s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn+3)/4)-1])/2
            s.vquartil3=(s.lo[((3*s.nn+1)/4)-1]+s.lo[((3*s.nn+5)/4)-1])/2
        elif mod(s.nn,4)==2:
            s.vquartil1=s.lo[((s.nn+2)/4)-1]
            s.vquartil3=s.lo[((3*s.nn+2)/4)-1]
        else:
            s.vquartil1=s.lo[((s.nn+1)/4)-1]
            s.vquartil3=s.lo[((3*s.nn+3)/4)-1]

        s.stem1 = r_stem( s.lista1 )

    def solve(s):
        s.vresposta=s.vquartil3-s.vquartil1
        #Opcoes Erradas
        s.errada1=s.vresposta+1
        if s.mediana1<>s.vquartil1:
            s.errada2=s.mediana1-s.vquartil1
        else:
            s.errada2=s.vquartil3-s.mediana1
        s.errada3 = s.max1-s.min1
```

A.4.7 Amplitude interquartil e diagrama de extremos e quartis

E97k40_graficoextremos_amplitudeinterquartil_001

%SUMMARY Medidas de dispersão; Amplitude interquartil e diagrama de extremos e quartis

```
Este exercício pretende calcular a amplitude interquartil, onde os
dados estão apresentados num diagrama de extremos e quartis.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(5431,0.5),(5432,0.5)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
O diagrama de extremos e quartis representado na figura seguinte
refere-se à distribuição dos tamanhos de sapatos dos nn alunos de uma escola.
   <center>
     boxplot1
   </center>
   A amplitude interquartil é aproximadamente:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice>$$vresposta$$</choice>
   <choice>$$errada1$$</choice>
   <choice>$$errada2$$</choice>
   <choice>$$errada3$$</choice>
</multiplechoice>

 A amplitude interquartil é igual à diferença entre os 3º e 1º quartis, ou seja,
$Q_{3}-Q_{1}= vquartil3 - vquartil1=vresposta$.
```

Programação

```
class E97k40_graficoextremos_amplitudeinterquartil_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.nn = ur.iunif(30,150)
        s.lista1=[ur.iunif(30,44) for i in range(s.nn)]
        s.lo=sorted(s.lista1)
        s.mediana1= median(s.lista1)
        s.min1=min(s.lista1)
        s.max1=max(s.lista1)
        s.amplitude1=s.max1-s.min1
        #OLD
        #boxplotgraphic = s.boxplot(s.lista1 , ylim=[30,45] )
        #s.boxplot1      = s.r_graphic( boxplotgraphic, "boxplot1",
            ↪ 10, 10) #10cm

        if mod(s.nn,4)==0:
            if mod(s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4],2)==0:
                s.vquartil1=round((s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])
                    ↪ /2,0)
            else:
                s.vquartil1=round((s.lo[(s.nn/4)-1]+s.lo[s.nn/4])
                    ↪ /2,1)
            if mod(s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn)/4],2)==0:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn
                    ↪ )/4])/2,0)
            else:
                s.vquartil3=round((s.lo[((3*s.nn)/4)-1]+s.lo[(3*s.nn
                    ↪ )/4])/2,1)
        elif mod(s.nn,4)==1:
            if mod(s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn+3)/4) -1],2)==0:
                s.vquartil1=round((s.lo[((s.nn-1)/4)-1]+s.lo[((s.nn
```

```
                ↪  +3)/4)−1])/2,0)
        else:
            s.vquartil1=round((s.lo[((s.nn−1)/4)−1]+s.lo[((s.nn
                ↪  +3)/4)−1])/2,1)
        if mod(s.lo[((3∗s.nn+1)/4)−1]+s.lo[((3∗s.nn+5)/4)−1],2)
            ↪  ==0:
            s.vquartil3=round((s.lo[((3∗s.nn+1)/4)−1]+s.lo[((3∗s
                ↪  .nn+5)/4)−1])/2,0)
        else:
            s.vquartil3=round((s.lo[((3∗s.nn+1)/4)−1]+s.lo[((3∗s
                ↪  .nn+5)/4)−1])/2,1)

    elif mod(s.nn,4)==2:
        s.vquartil1=s.lo[((s.nn+2)/4)−1]
        s.vquartil3=s.lo[((3∗s.nn+2)/4)−1]
    else:
        s.vquartil1=s.lo[((s.nn+1)/4)−1]
        s.vquartil3=s.lo[((3∗s.nn+3)/4)−1]

    boxplotgraphic = s.boxplot(
            q1=s.vquartil1,
            med=s.mediana1,
            q3=s.vquartil3,
            vmin=s.min1,
            vmax=s.max1,
            xlabel="Tamanho dos Sapatos", # Titulo da v.a. que
               ↪  descreve os dados.
            qmark=True #mostra valores ao lado direito.
    )
    s.boxplot1    = s.sage_graphic( boxplotgraphic, "boxplot1",
        ↪  10, 10) #10cm
```

```
def solve(s):

    s.vresposta=s.vquartil3-s.vquartil1

    #Opcoes Erradas
    s.errada1=s.vresposta+1
    if s.mediana1<>s.vquartil1:
        s.errada2=s.mediana1-s.vquartil1
    else:
        s.errada2=s.vquartil3-s.mediana1
    if s.vresposta<>s.amplitude1:
        s.errada3 = s.max1-s.min1
    else:
        s.errada3=s.vresposta-1

def boxplot(self,
        q1=None,
        med=None,
        q3=None,
        vmin=None,
        vmax=None,
        xlabel="Number of Soups",
        dff=1.5,
        qmark=False,
        method="school"):

    r'''
    It draws a boxplot using given parameters.

    INPUT:
    - ``q1`` - first quartil
    - ``med`` - median
    - ``q3`` - third quartil
```

```
- ``vmin`` - sample minimum
- ``vmax`` - sample maximum
- ``xlabel`` - One or two words describing the boxplot
  ↪ random variable"
- ``dff`` - factor like: :math:`q_1-dff*(q_3-q_1)` and :math
  ↪ :`q_3+dff*(q_3-q_1)`
- ``qmark`` - plot q1,med,q3 numbers in the right axix
- ``method`` - only "school" for now (see below)

OUTPUT:
- matplotlib plot object with the boxplot

NOTES:

# Some links:
# http://stackoverflow.com/questions/3777861/setting-y-axis-
  ↪ limit-in-matplotlib
# http://matplotlib.org/examples/pylab_examples/boxplot_demo
  ↪ .html
# GRID
# http://stackoverflow.com/questions/14608483/how-to-add-a-
  ↪ grid-line-at-a-specific-location-in-matplotlib-plot
  ↪ /14610910#14610910

#Some commands:
#ax.set_yticks( list(plt.yticks()[0]) + [4.5] )
#ax.set_yticks([1.5,4.5], minor=False)
#yticks( arange(12), calendar.month_name[1:13], rotation=45
  ↪ )

#ax.axhline(4.5, linestyle='--', color='k')

#ax.arrow(0.8, 4, -0.25, 0, label="ola", linestyle='dashed',
```

```
    ↪ head_width=0.2, head_length=0.05) #, fc='k', ec='k')
#ax.arrow(1,4, -0.4, 0)

'''

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt



# basic plot
plt.figure()



#plt.xlim( (0.9,1.1) ) #sera preciso
ax = plt.axes()

plt.xticks( [0.5], [xlabel] )

#Plots q1,med,q3
#http://matplotlib.org/api/pyplot_api.html#matplotlib.pyplot
    ↪ .plot
xstartend = [0.1,0.9]
ax.plot( xstartend,[q1,q1], 'b-')
ax.plot( xstartend,[med,med],'b-', linewidth=2)
ax.plot( xstartend,[q3,q3], 'b-')
#vertical
ax.plot( [xstartend[0],xstartend[0]], [q1,q3], 'b-' )
ax.plot( [xstartend[1],xstartend[1]], [q1,q3], 'b-' )

#Mustache

#In this algorithm this is not used because
#mustches are the min and max of the sample
```

```
        #when different from q1 or q3.
        #mustache_hi  = q3 + dff*(q3-q1)
        #mustache_low = q1 - dff*(q3-q1)
        #if mustache_low < vmin: #nao se desenham outliers , o bigode
            ↪  e' sempre p minimo.
        mustache_low = vmin
        #if mustache_hi < vmax: #nao se desenham outliers , o bigode
            ↪ e' sempre o maximo
        mustache_hi = vmax

        xstartend = [0.3,0.7] #trimmed mustaches

        if mustache_low < q1:
            ax.plot( xstartend,[mustache_low,mustache_low], 'b-')
            ax.plot( [0.5,0.5], [q1,mustache_low], 'b--')
        if mustache_hi > q3:
            ax.plot( [0.5,0.5], [q3,mustache_hi], 'b--')
            ax.plot( xstartend,[mustache_hi,mustache_hi], 'b-')

        #Melhorar o valor do "aspect"
        ax.set_aspect(0.2)

        #TODO: mudar este +1 e -1 abaixo dependendo da escala
        plt.ylim(    (mustache_low-1, mustache_hi+1)   )
        plt.xlim(  (0,1)  )

        if qmark:
            if int(q3)==q3:
                labelq3=str(int(q3))
            else:
                labelq3=str(round(q3,1))
            if int(q1)==q1:
                labelq1=str(int(q1))
```

```
        else:
            labelq1=str(round(q1,1))
        if int(med)==med:
            labelmed=str(int(med))
        else:
            labelmed=str(round(med,1))

        #textual labels at right
        #does not work: ax.set_yticks([q1,med,q3], minor=False)
        ax.axhline(y=q3,  xmin=0.98, xmax=1, color='black')
        ax.axhline(y=med, xmin=0.98, xmax=1, color='black')
        ax.axhline(y=q1,  xmin=0.98, xmax=1, color='black')
        ax.text(1,q3,  ' '+ labelq3 , color='red',va='center')
        ax.text(1,med,' '+ labelmed,color='red',va='center')
        ax.text(1,q1,  ' '+ labelq1 , color='red',va='center')

    return plt
```